Adrian Ludușan

Logică matematică

Presa Universitară Clujeană

ADRIAN LUDUȘAN

LOGICĂ MATEMATICĂ

ADRIAN LUDUȘAN

LOGICĂ MATEMATICĂ

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

2013

Referenţi ştiinţifici:

Prof. univ. dr. Andrei Marga

Prof. univ. dr. Mircea Dumitru

ISBN 978-973-595-614-1

Universitatea Babeş-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruţa Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400971 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@editura.ubbcluj.ro
http://www.editura.ubbcluj.ro/

Cuprins

0 Introducere

Lucrarea se adresează tuturor celor care doresc să aprofundeze logica matematică, îndeosebi logica de ordinul I, indiferent de natura interesului lor în studiul acestei logici. Lucrarea nu asumă prerechizite matematice mai complicate decât cele reprezentate de matematica de liceu iar tehnicile matematice superioare folosite, atât cele din teoria mulţimilor cât şi cele algebrice, sunt introduse intuitiv, pe baza unor exemple, iar ulterior sunt definite în deplină rigoare formală. În scopul transparent de a descrie şi analiza unele sisteme logice, lucrarea îşi propune, pe de-o parte, să formeze şi dezvolte intuiţia în domeniul structurilor matematice presupuse de semantica logicii de ordinul I, cu o atenţie deosebită asupra înţelegerii paşilor demonstraţiilor unor teoreme semnificative şi, pe de altă parte, să prezinte instrumentele matematice folosite în studiul logicii cât se poate de clar şi riguros. Lucrarea este compusă din patru mari capitole. În primul capitol vom descrie structura alegbrică a limbajelor formale, pe care se va fundamenta aplicarea unor tehnici matematice folosite copios atât în calculul propoziţional cât şi în logica de ordinul I (LOI)[1] În capitolul al doilea vom introduce un sistem axiomatic al calculului propoziţional şi vom demonstra completitudinea sistemului axiomatic al calculului propoziţional prin două metode: una efectivă, datorată lui László Kalmár[2] şi una neefectivă, a cărei folosire şi importanţă în dezvoltările ulterioare ale logicii este greu de subestimat, metodă datorată lui Leon Henkin[3]. De asemenea, rezultatele obţinute în calculul propoziţional vor fi folosite pentru stabilirea unor teoreme fundamentale de caracterizare a logicii de ordinul întâi, astfel încât demonstrarea lor riguroasă în capitolul al doilea ne va scuti de încărcarea excesivă cu demonstraţii a teoremelor din capitolul al treilea şi al patrulea. Capitolul al treilea prezintă, de asemenea, un sistem axiomatic al logicii

[1] Vom prescurta 'logica de ordinul I' prin LOI.

[2] Laszlo Kalmár [1935], 'Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls', *Acta Scientiarum Mathematicarum* 7, pp. 222 – 243.

[3] Leon Henkin [1949a], 'The completeness of the first-order functional calculus' în *The Journal of Symbolic Logic* 14, pp. 159 – 166.

de ordinul I iar nucleul acestui capitol îl constituie prezentarea riguroasă a teoremei de completitudine. Capitolul al patrulea prezintă conceptele fundamentale ale teoriei modelelor şi a cîtorva rezultate de bază, iar în acest context sunt discutate principalele rezultate metateoretice de caracterizare a logicii de ordinul I. După cum s-a putut observa din descrierea capitolului al doilea şi al treilea, interesul lucrării este de a prezenta într-un mod riguros şi detaliat matematic dar comprehensiv cele mai semnificative proprietăţi metateoretice ale acestor sisteme. Din acest motiv am optat pentru o abordare axiomatică atât a logicii propoziţiilor cât şi a logicii de ordinul I. Această opţiune are câteva minusuri importante. În primul rând, orice sistem axiomatic presupune o modalitate neintuitivă de derivare a teoremelor sau enunţurilor ce decurg dintr-o mulţime de asumpţii. În al doilea rând, abordarea axiomatică ne determină să optăm pentru un alfabet şi un limbaj cât mai simplu, ceea ce face ca anumite argumente cu un substrat intuitiv puternic să fie reconstruite într-un mod artificial, în termenii stipulaţi în limbajul axiomatic. Un sistem de deducţie naturală este mult mai indicat, dacă scopul este prezentarea unui sistem bogat în conectori, definiţi intuitiv, în care latura formală a demonstraţiilor şi deducţiilor este mult mai intuitivă. Un sistem de tablouri semantice reprezintă, de asemenea, o alegere adecvată în scopul unei prezentării cât mai intuitive a sistemelor logice. Dar (şi acum subliniem principalul avantaj al opţiunii pentru abordarea axiomatică), dacă scopul urmărit este prezentarea unor rezultate metateoretice fundamentale, atunci abordarea axiomatică este de preferat.

1 Structura algebrică a limbajelor formale

ALFABETE, SEMIGRUPURI LIBER GENERATE ŞI FACTORIZĂRI UNICE

Alfabete şi cuvinte

Precizarea unui *alfabet* Σ constă în specificarea unei mulţimi oarecare nevide de elemente, numite *litere* sau *simboluri*. Singura restricţie pe care o aplicăm alfabetelor este ca nici un element al alfabetului să nu poată fi obţinut din celelalte elemente. Se observă că asupra cardinalului mulţimii de litere nu s-a impus nici o restricţie, cu alte cuvinte, mulţimea Σ a literelor alfabetului poate fi finită, infinit numărabilă sau chiar infinit nenumărabilă[1]. Deşi orice tip de simboluri pot constitui alfabetul unui limbaj, în practică alfabetele alese denotă teoria analizată. De pildă, pentru a formula aritmetica Peano în limbajul logicii de ordinul I[2] vom folosi un alfabet[3] Σ care conţine (pe lângă simbolurile alfabetului limbajului logicii de ordinul I)[4] următoarele simboluri $\Sigma = \{0, S, +, \times, <\}$. Pentru teoria grupurilor, formulată în limbajul logicii de ordinul I, vom avea un alfabet constituit din următoarele simboluri $\Sigma = \{e, \circ\}$. Peste un alfabet oarecare Σ putem forma *stringuri* sau *şiruri* finite de simboluri din alfabetul Σ, numite *cuvinte* şi simbolizate cu w[5].

Un cuvânt $w = a_1\, a_2 \ldots a_n$ este o funcţie definită pe o submulţime finită $\{1, 2, \ldots, n\}$ a numerelor naturale, în care numărul n reprezintă *lungimea cuvântului*,

---

[1] În continuare, însă, ne vom mărgini doar la alfabete care sunt cel mult numărabile, adică finite sau infinit numărabile.

[2] Vom preciza şi analiza în detaliu limbajul logicii de ordinul I în continuare.

[3] Σ este, propriu-zis, signatura limbajului de ordinul I iar în discuţiile din capitolele următoare o vom nota cu σ.

[4] Pentru a sesiza specificitatea vocabularului teoriei alese, vom eluda, în continuare, referinţa la simbolurile limbajului logicii de ordinul I

[5] Vom mai folosi litera *w* şi în specificarea limbajului logicii modale pentru a desemna lumi posibile, dar contextele sunt suficient de diferite şi îndepărtate pentru a elimina orice ambiguitate.

simbolizat cu l[w] sau $|w|$, cu valori în mulţimea simbolurilor alfabetului Σ iar valoarea funcţiei pentru argumentul i se notează cu a_i:

$$w: \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \Sigma,$$
$$w(i) = a_i\ ,\ 1 \leq i \leq n,\ a_i \in \Sigma.$$

Exemplu: fie alfabetul Σ = {(,), r, ∫}. Şirul 'r(∫'este un *cuvânt* peste alfabetul Σ, domeniul funcţiei este mulţimea {*1*, *2*, *3*} iar funcţia $w(i)$, este definită de următoarele egalităţi:

$$w(1) = a_1 = \mathrm{r}$$
$$w(2) = a_2 = ($$
$$w(3) = a_3 = \int$$

Dacă permitem ca domeniul funcţiei să fie vid, atunci w este o funcţie vidă cu domeniu şi codomeniu vid căreia îi corespunde *cuvântul nul*, notat cu ε; evident, lungimea cuvântului nul este 0, l[ε] = 0.

Notăm prin Σ^n mulţimea tuturor cuvintelor de lungime n formate cu simboluri din Σ. De exemplu, dacă Σ = {0, 1}, Σ^2 = {00; 01; 10; 11}. Mulţimea tuturor şirurilor finite nevide de simboluri ale alfabetului se numeşte *mulţimea cuvintelor nevide peste alfabetul* Σ şi se notează cu Σ^+. Formal, $\Sigma^+ = \bigcup_{i \in \mathrm{N}^*} \Sigma^i$.

Mulţimea cuvintelor nevide peste un alfabet oarecare Σ la care se adaugă cuvîntul nul se numeşte *mulţimea cuvintelor peste alfabetul*[6] Σ şi se notează cu Σ*. Aşadar,

$$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\},$$

sau,

$$\Sigma^* = \bigcup_{i \in \mathrm{N}} \Sigma^i\ .$$

Să notăm, în acest punct al prezentării, două observaţii: 1) mulţimea cuvintelor de lungime 1 este mulţimea simbolurilor alfabetului Σ, adică Σ^1 = Σ, şi 2) ε este un cuvânt (respectiv cuvântul nul) dar nu este un simbol al alfabetului Σ.

Pe mulţimea cuvintelor peste alfabetul Σ, adică pe mulţimea Σ*, se defineşte o operaţie binară 'naturală'[7], numită *concatenare*, simbolizată prin ^, prin care formăm din oricare două cuvinte peste un alfabet un alt cuvânt obţinut prin

---

[6] Σ* mai este cunoscută şi sub denumirea de *închiderea kleene* a limbajului Σ.

[7] Vezi Paul Halmos, Steven Givant [1998], *Logic as Algebra*, Dolciani Mathematical Expositions - No.21, The Mathematical Association of America, p. 19.

juxtapunerea[8] simbolurilor celor două cuvinte. Pentru aceasta, să considerăm două cuvinte oarecare, w_n, w_m, de lungimi $l[w_n] = n$, $l[w_m] = m$ ale unui alfabet oarecare Σ:

$$w_n: \{1, \ldots, n\} \to \Sigma,$$
$$w_n(i) = a_i,\ 1 \le i \le n,\ a_i \in \Sigma$$
$$w_m: \{1, \ldots, m\} \to \Sigma,$$
$$w_m(i) = b_i,\ 1 \le i \le m,\ a_i \in \Sigma.$$

Prin intermediul operaţiei de concatenare obţinem un nou cuvânt, notat w_n^w_m, de lungime $l[w_n$^$w_m] = n + m$ căruia îi corespunde funcţia w_n^w_m: $\{1, \ldots, n + m\} \to \Sigma$ definită prin egalitatea[9]:

$$w_n\hat{\ }w_m(i) = \begin{cases} a_i \text{ dacă } 1 \le i \le n \\ b_{i-n} \text{ dacă } n+1 \le i \le n+m \end{cases}.$$

Exemplu: fie alfabetul $\Sigma = \{a, b, c\}$. Formăm mulţimea Σ^* a tuturor cuvintelor peste Σ plus cuvântul vid. Fie, acum, două cuvinte din mulţimea Σ^*:

$w_2 = ab$, $w_2(1) = a_1 = a$, $w_2(2) = a_2 = b$, $n = l(w_2) = 2$ şi
$w_3 = acb$, $w_3(1) = b_1 = a$, $w_3(2) = b_2 = c$, $w_3(3) = b_3 = b$, $m = l(w_3) = 3$.
Rezultatul concatenării celor două cuvinte este w_2^$w_3 = abacb$.
Conform precizărilor de mai sus, se observă că $l(w_2$^$w_3)=l(w_2) + l(w_3) = 5$, $n = 2$, iar funcţia w_2^w_3:$\{1, \ldots, 5\} \to \Sigma$ este definită de următoarele egalităţi:

$$w_2\hat{\ }w_3(1) = a_1 = a,$$
$$w_2\hat{\ }w_3(2) = a_2 = b,$$
$$w_2\hat{\ }w_3(3) = b_{3-2} = b_1 = a,$$
$$w_2\hat{\ }w_3(4) = b_{4-2} = b_2 = c,$$
$$w_2\hat{\ }w_3(5) = b_{5-2} = b_3 = b.$$

Să considerăm acum cuvântul $w_5 = abacb$. Conform *definiţiei 1.1*,
w_5:$\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \Sigma$, $w_5(1) = a$, $w_5(2) = b$, $w_5(3) = a$, $w_5(4) = c$, $w_5(5) = b$.

---

[8] În expunerea de faţă vom considera cei doi termeni, concatenare şi juxtapunere, sinonimi, în acord cu vocabularul matematic conscrat, de pildă, în I. Creangă, C. Rescher, D. Simovici [1974], *Introducere algebrică în informatică*, vol. II, 'Limbaje formale', Iaşi: Junimea, p. 28.

[9] Această definiţie a funcţiei ne permite să determinăm pentru orice argument din domeniul $\{1, 2, \ldots, n + m\}$valoarea simbolului corespunzător din cuvântului obţinut prin concatenarea cuvintelor w_n şi w_m, dar putem defini aceeaşi funcţie invers, mai precis pornim de la valorile simbolurilor din cuvintele w_n şi w_m pentru a determina valorile domeniului cuvântului concatenat, aşa cum, de pildă, procedează Paul Halmos şi Steven Givant în *op.cit.*, p.19 definind funcţia corespunzătoare cuvântului concatenat prin următoarele relaţii: w_n^$w_m(i) = a_i$ dacă $i < n+1$ şi w_n^$w_m(i+n) = b_i$ dacă $i < m+1$.

Se observă că $w_5(i) = w_2$^$w_3\ (i)$, $i = \overline{1,5}$. De pildă, valoarea pe care am atribui-o cuvîntului w_5 pentru argumentul *4* este *c*, adică $w_5(4) = c$. Să vedem ce valoare atribuim cuvântului w_2^w_3 pentru acelaşi argument, conform definiţiei operaţiei de concatenare: pentru $i = 4$, valoarea funcţiei w_2^$w_3(4)$ va fi dată de valoarea lui b_{i-n}, ($n = 2$ şi $n \leq i$) adică w_2^$w_3(4) = b_{4-2} = b_2 = c$.

În continuare vom preciza câteva concepte elementare implicate în analiza limbajelor formale pe care le vom folosi atunci când vom analiza sintaxa calculului propoziţiilor şi al logicii de ordinul I, în capitolele următoare.

Fie Σ un alfabet şi w_i, $w_k \in \Sigma^*$. Spunem că:

i) w_i este un *segment iniţial* al cuvântului w_k (sau că w_i este un *prefix* al cuvântului w_k) dacă există cuvântul $w_j \in \Sigma^*$ astfel încât w_i^$w_j = w_k$. Dacă $w_i \neq w_k$ şi $w_i \neq \varepsilon$ spunem că w_i este un *segment iniţial propriu* (sau *prefix propriu*).

ii) w_i este un *segment final* al cuvântului w_k (sau că w_i este un *sufix* al cuvântului w_k) dacă există cuvântul $w_j \in \Sigma^*$ astfel încât w_j^$w_i = w_k$. Dacă $w_i \neq w_k$ şi $w_i \neq \varepsilon$ spunem că w_i este un *segment final propriu* (sau *sufix propriu*).

Exerciţii:

1) Explicaţi de ce $A = \{a, b, ab\}$ nu este un alfabet.

2) Fie alfabetul $\Sigma = \{p, q, \rightarrow,\}$. Determinaţi Σ^3.

3) Care dintre următoarele şiruri reprezintă segmente iniţiale ale cuvintelor din Σ^3, unde Σ este alfabetul de la punctul 2): a) q, b) $q\rightarrow$, c) $q\rightarrow p$. Care dintre şirurile de la punctele a), b), c) sunt segmente iniţiale proprii?

3) Care dintre următoarele şiruri reprezintă segmente finale ale cuvintelor din Σ^3, unde Σ este alfabetul de la punctul 2): a) q, b) qp, c) $\rightarrow qp$. Care dintre şirurile de la punctele a), b), c) sunt segmente finale proprii?

4) Dacă Σ este un alfabet finit de n elemente, determinaţi câte elemente va avea Σ^n. Dar Σ^{n+1}?

Semigrupuri, subsemigrupurilor şi semigrupuri liber generate.

Un *semigrup* este un cuplu $(S, \bullet)$ format dintr-o mulţime S şi o operaţie $\bullet$binară asociativă,

$$\bullet: S \times S \rightarrow S,$$

$$(Asoc)\ (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z),\ \forall x \forall y \forall z \in S.$$

Exemplu: cuplul ($2\mathbb{N}$, +) format din mulţimea numerelor pare dotată cu operaţia de adunare reprezintă un semigrup, după cum se poate verifica (operaţia '+' este o lege de compoziţie internă şi respectă asociativitatea).

O întrebare interesantă este dacă putem generaliza proprietatea asociativităţii la orice n-uplu, $n \geq 3$, de elemente din S. Răspunsul este afirmativ, iar pentru a demonstra generalizarea proprietăţii asociativităţii trebuie, în prealabil, să introducem o definiţie şi să facem o observaţie.

Fie (S, •) un semigrup şi $x_1, ..., x_n, x_{n+1} \in S$. Definim recursiv compunerea elementelor $x_1, ..., x_n, x_{n+1}$ în următorul mod:

$$(1)\ x_1 \bullet ... \bullet x_{n+1} = (x_1 \bullet ... \bullet x_n) \bullet x_{n+1}.$$

Observaţie: din (1) şi definiţia operaţiei • rezultă că pentru orice n-uplu $x_1 \bullet ... \bullet x_{n+1}$ de elemente din S, $x_1 \bullet ... \bullet x_{n+1} = t$, unde $t \in S$.

Lema 1.1. Fie $x_1, ..., x_n \in S$. Atunci

$$(x_1 \bullet ... \bullet x_k) \bullet (x_{k+1} \bullet ... \bullet x_n) = x_1 \bullet ... \bullet x_n,$$

pentru orice k, $1 \leq k < n$, $2 \leq n$.

Demonstraţie: prin inducţie pe n. Să notăm egalitatea de mai sus prin G(n), adică

$$G(n): (x_1 \bullet ... \bullet x_k) \bullet (x_{k+1} \bullet ... \bullet x_n) = x_1 \bullet ... \bullet x_n.$$

Cazul de bază, n = 2. În acest caz, k nu poate avea o altă valoare decît 1 iar egalitatea G(2) este trivial adevărată:

$$G(2): (x_1) \bullet (x_2) = x_1 \bullet x_2.$$

Ipoteza inducţiei: să presupunem că pentru $n = m$ şi $1 \leq k < m$ este adevărată egalitatea

$$G(m): (x_1 \bullet ... \bullet x_k) \bullet (x_{k+1} \bullet ... \bullet x_m) = x_1 \bullet ... \bullet x_m.$$

şi să demonstrăm că din adevărul lui G(m), rezultă adevărul egalităţii:

$$G(m+1): (x_1 \bullet ... \bullet x_k) \bullet (x_{k+1} \bullet ... \bullet x_{m+1}) = x_1 \bullet ... \bullet x_{m+1}.$$

Distingem 2 cazuri, în funcţie de valoarea lui k.

a) $k = m$. În acest caz, $(x_1 \bullet ... \bullet x_k) \bullet (x_{k+1} \bullet ... \bullet x_{m+1}) = (x_1 \bullet ... \bullet x_m) \bullet x_{m+1}$
$= x_1 \bullet ... \bullet x_{m+1}$.(conform cu (1))

b) $k < m$. În acest caz,

$(x_1 \bullet ... \bullet x_k) \bullet (x_{k+1} \bullet ... \bullet x_{m+1}) = (x_1 \bullet ... \bullet x_k) \bullet ((x_{k+1} \bullet ... \bullet x_m) \bullet x_{m+1})$ [(1) aplicat la $(x_{k+1} \bullet ... \bullet x_{m+1})$]
$= ((x_1 \bullet ... \bullet x_k) \bullet (x_{k+1} \bullet ... \bullet x_m)) \bullet x_{m+1}$ [din *Observaţia 1* şi (*Asoc*)]

$= (x_1 \bullet ...... \bullet x_m) \bullet x_{m+1}$ [conform ipotezei inducţiei]
$= x_1 \bullet ...... \bullet x_m \bullet x_{m+1}$ [conform cu (1)]

Evident $<\Sigma^+, \wedge>$ este un semigrup. Dacă luăm în considerare şi cuvântului nul, ε, atunci $<\Sigma^*, \wedge>$ este un monoid, unde *monoidul* (M, •) se defineşte ca un semigrup dotat cu un element neutru, adică pe lângă (*Asoc*), structura algebrică mai respectă şi:

$$(En): \exists e \forall x, x \bullet e = x, \text{ unde } x, e \in M.$$

Exemplu: ($\mathbb{N}^*$, ·) este un monoid, unde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ iar · reprezintă operaţia de înmulţire.

Spunem că A este un *subsemigrup* al semigrupului (S, •), simbolic $A \leq S$, dacă A este o submulţime nevidă a lui S, adică $A \subseteq S$ şi $A \neq \emptyset$, care satisface următoarea clauză:

$$(\hat{I}nchidere)\ \forall x \forall y, \text{ dacă } x, y \in A, \text{ atunci } (x \bullet y) \in A,$$

unde • este operaţia asociativă din semigrupul (S, •).

Exemplu: ($4\mathbb{N}$, +) este un subsemigrup al semigrupului ($2\mathbb{N}$, +).

Fie (S, •) un semigrup oarecare şi $I \subseteq \mathbb{N}$. Notăm cu $A_\cap$ intersecţia *tuturor subsemigrupurilor* A_i, $i \in I$, ale lui S. Formal, $A_\cap = \bigcap_{i \in I} \{A_i, A_i \leq S\}$. Această mulţime este, la rândul ei, un subsemigrup, fapt ce constituie obiectul lemei de mai jos.

Lema 1.2. Fie (S, •) un semigrup oarecare. Dacă $A_\cap \neq \emptyset$, atunci $A_\cap \leq S$.

Demonstraţie: Dacă $x, y \in A_\cap$, atunci, pentru orice A_i, $i \in I$, $x, y \in A_i$. Dar, din faptul că $x, y \in A_i$, rezultă că $(x \bullet y) \in A_i$, pentru orice A_i, $i \in I$, aşadar, $(x \bullet y) \in A_\cap$. Prin urmare, dacă $x, y \in A_\cap$, atunci $(x \bullet y) \in A_\cap$. Dar $A_\cap \neq \emptyset$ [ipoteza teoremei], de unde deducem că $A_\cap \leq S$.

În continuare vom abrevia notaţia pentru semigrupuri sau monoizi eludând specificarea operaţiei binare. Astfel, (S, •) devine S, (M, •), M şi vom considera în lipsa altor specificaţii sau precizări că operaţia • este multiplicativă; de pildă, ne vom referi la rezultatul efectuării următorului şir de n-1operaţii[10] $(x_0 \bullet x_1 \bullet ... \bullet x_n)$ ca la

[10] Conform *lemei 1.1* acest şir de operaţii nu este ambiguu.

produsul celor n elemente. De asemenea, acolo unde contextul este clar vom renunţa să mai specificăm semigrupul din care subsemigrupurile discutate fac parte.

Fie un semigrup S; şi o submulţime nevidă $X \subseteq S$. Formăm intersecţia $\langle X \rangle_\cap$ a tuturor subsemigrupurilor A_i din S care îl conţin pe X, formal, $\langle X \rangle_\cap = \bigcap_{i \in I} \{A_i, X \subset A_i, A_i \leq S\}$. Evident $\langle X \rangle_\cap \neq \emptyset$ pentru că $X \subseteq S$ şi $S \leq S$. După cum se poate observa, $\langle X \rangle_\cap$ îndeplineşte condiţiile *lemei 1.2*, prin urmare $\langle X \rangle_\cap$ este un subsemigrup al lui S, $\langle X \rangle_\cap \leq S$.

În virtutea *lemei 1.1*, orice produs $(x_1 \bullet x_2 \bullet \ldots \bullet x_i)$ de i elemente dintr-un semigrup S şi orice produs $(x \bullet y)$ de două astfel de produse de upluri $x = (x_1 \bullet x_2 \bullet \ldots \bullet x_i)$ şi $y = (y_1 \bullet y_2 \bullet \ldots \bullet y_j)$ este neambiguu (oferă acelaşi rezultat). Cu această precizare, putem să construim mulţimea tuturor produselor $(x_1 \bullet x_2 \bullet \ldots \bullet x_i)$ de i elemente din X, pe care o notăm în continure prin X^i, unde $i \in \mathbb{N}^*$,. Mai precis, definim $X^i = \{(x_1 \bullet x_2 \bullet \ldots \bullet x_i) / \forall x_1, x_2, \ldots, x_i \in X\}$. Evident, $X^1 = X$. Reuniunea tuturor acestor mulţimi X^i, $i \in \mathbb{N}^*$o notăm cu $\langle X \rangle_\cup$ şi o definim formal ca $\langle X \rangle_\cup = \bigcup_{i \in N^*} X^i$.

Teorema 1.1 $\langle X \rangle_\cap = \langle X \rangle_\cup$

Demonstraţie: ca strategie generală, demonstrarea identităţii a două mulţimi presupune doi paşi: 1) demonstraţia incluziunii primei mulţimi în a doua şi 2) a incluziunii celei de-a doua mulţimi în prima.

Pentru a demonstra că (I) $\langle X \rangle_\cap \subseteq \langle X \rangle_\cup$ este suficient să demonstrăm că $\langle X \rangle_\cup$ este un subsemigrup al lui S care conţine mulţimea X (de ce?), ceea ce se poate verifica fără prea mari dificultăţi:

1) $X \neq \emptyset$ şi $X = X^1 \subseteq \langle X \rangle_\cup$, aşadar $\langle X \rangle_\cup \neq \emptyset$ şi conţine mulţimea X.

2) fie $x, y \in \langle X \rangle_\cup$. Fără a pierde din generalitate, să presupunem că $x = (x_1 \bullet x_2 \bullet \ldots \bullet x_i)$ şi $y = (y_1 \bullet y_2 \bullet \ldots \bullet y_j)$. În aceste condiţii, $x \in X^i$, $y \in X^j$. Conform *lemei 1.1*, $(x \bullet y) = (x_1 \bullet x_2 \bullet \ldots \bullet x_i) \bullet (y_1 \bullet y_2 \bullet \ldots \bullet y_j) = (x_1 \bullet x_2 \bullet \ldots \bullet x_i \bullet y_1 \bullet y_2 \bullet \ldots \bullet y_j)$. Din construcţia mulţimii $\langle X \rangle_\cup$ rezultă că $(x \bullet y) \in X^{i+j}$. Aşadar, din $x, y \in \langle X \rangle_\cup$ rezultă $(x \bullet y) \in \langle X \rangle_\cup$.

Din 1) şi 2) rezultă că $\langle X\rangle_{\cup} \leq S$. Din $\langle X\rangle_{\cup} \leq S$, rezultă $\langle X\rangle_{\cap} \subseteq \langle X\rangle_{\cup}$.

Pentru a demonstra că (II) $\langle X\rangle_{\cup} \subseteq \langle X\rangle_{\cap}$ este suficient să observăm că pentru orice $i\in \mathbb{N}^*$, $X^i \subseteq \langle X\rangle_{\cap}$ (observaţia este elementară, $X^1 = X \subseteq \langle X\rangle_{\cap}$, iar orice X^i, $i\in \mathbb{N}^*$, conform definiţiei acestuia, nu conţine decât produse ($x_1 \bullet x_2 \bullet \ldots \bullet x_i$) de elemente $x_1, x_2, \ldots, x_i$ din X, care, *a fortiori*, sunt incluse în $\langle X\rangle_{\cap}$).

Din demonstraţiile pentru (I) şi (II) rezultă că $\langle X\rangle_{\cap} = \langle X\rangle_{\cup}$.

Una dintre semnificaţiile fundamentale ale *teoremei 1.1* este că permite identificarea subsemigrupului $\langle X\rangle_{\cap}$ cu mulţimea elementelor din S care pot fi exprimate ca produse finite de elemente din X. De asemenea, conform *teoremei 1.1* putem renunţa la subscriptul '$\cap$' sau '$\cup$' şi nota simplu $\langle X\rangle$.

Fie un semigrup S şi X o submulţime nevidă $X \subseteq S$. În aceste condiţii, spunem despre *mulţimea X că generează semigrupul S* sau, corelativ, că *semigrupul S este generat de mulţimea X,* dacă $\langle X\rangle = S$. Submulţimea X a semigrupului S se numeşte *mulţimea generatorilor* lui S.

Dacă submulţimea X are un număr finit de elemente $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, vom nota, în continuare, subsemigrupul generat de X, prin $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ adică $\langle X\rangle = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$. În particular, cînd $X = \{x\}$, subsemigrupul generat de X se notează prin $\langle x\rangle$, unde, conform *teoremei 1.1*, $\langle x\rangle = \{x^1, x^2, x^3, \ldots\}$. Mulţimea $\langle x\rangle$ se numeşte subsemigrupul *monogenic* sau *ciclic* generat de x, iar în cazul în care $\langle x\rangle = \{x^1, x^2, x^3, \ldots\} = S$, vom spune că S este un semigrup *monogenic* sau *ciclic*.

Rezultatele obţinute din studiul semigrupurilor generate de o mulţimea finită X au aplicaţii în teoria automatelor.

Exemplu: fie semigrupul ($S = \{ a, b, c\}$, $\star$) şi $X = \{a\}$, unde operaţia asociativă $\star$: $S\times S \to S$ este definită prin următorul tabel:

★	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

În aceste condiţii, $\langle X \rangle = \langle a \rangle = \{a^1, a^2, a^3, \ldots\} = \{a, b, c\}$[11] $= S$, aşadar X generează semigrupul S iar S este monogenic.

fie $(S, \bullet)$ şi $(T, \times)$ două semigrupuri. Se numeşte *homomorfism* de semigrupuri orice funcţie h: $S \rightarrow T$ astfel încît: $h(x \bullet y) = h(x) \times h(y)$, pentru orice $x, y \in S$.

Exemplu: fie semigrupul $(\mathbb{N}^*, +)$ şi semigrupul $(2^{\mathbb{N}^*}, \cdot)$, unde $2^{\mathbb{N}^*} = \{2, 4, 8, ...\}$, adică mulţimea puterilor lui 2. Funcţia $h(x) = 2^x$ este un homomorfism, după cum se poate verifica: $h(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = h(x) \cdot h(y)$.

Spunem că două semigrupuri oarecare $(S, \bullet)$ şi $(T, \times)$ sunt *izomorfe*, $(S, \bullet) \cong (T, \times)$, dacă există un homomorfism bijectiv h: $S \rightarrow T$.

Spunem despre un semigrup S că este *liber generat*, dacă există o submulţime $X \subseteq S$ care generează semigrupul S şi orice funcţie h_0: $X \rightarrow T$, unde T este un semigrup oarecare, se extinde în mod unic la un homomorfism h: $S \rightarrow T$ (extensia presupune că $h / X = h_0$).

Exemplu: semigrupul $(\mathbb{N}, +)$ este liber generat de submulţimea $X = \{1\}$.
Observaţie: nu orice mulţime de generatori generează liber o anumită structură algebrică. De pildă, semigrupul $(\mathbb{N}, +)$ este liber generat de 1, dar semigrupul $(\mathbb{Z}_5\ \oplus)$, deşi generat de $[1]$, nu este liber generat.

Definiţia 1.6 poate fi reformulată într-un mod mai abstract în termenii teoriei categoriilor.

Fie X mulţimea generatorilor unui semigrup A, i: $X \rightarrow A$, funcţia incluziune, şi S un semigrup oarecare. Spunem că A este *liber generat* de X dacă pentru orice funcţie h_0: $X \rightarrow S$ există un homomorfism unic h: $A \rightarrow S$ astfel încât diagrama de mai jos este comutativă.

---

[11] $(a^1 = a;\ a^2 = b;\ a^3 = c,\ a^4 = a,\ \ldots)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h_0"'] & A \arrow[dl, "h"] \\ S & \end{tikzcd}$$

Cerinţa de comutativitate constă în următoarea egalitate: $h \circ i = h_0$, unde $\circ$ este compunerea funcţiilor.

Semigrupul liber generat al cuvintelor unui alfabet

Definiţia 1.6 exprimă *proprietatea de universalitate a semigrupurilor liber generate*: din moment ce relaţiile satisfăcute de elementele mulţimii X a generatorilor unui semigrup liber generat S sunt păstrate sub transformările homomorfice, constituţia semigrupurilor liber generate este de aşa natură încât relaţiile valabile în acesta rămân valabile în toate semigrupurile. Pentru cazul considerat de noi, să demonstrăm că Σ^+ are proprietatea de universalitate, înseamnă să demonstrăm că orice funcţie h_0: $\Sigma \to S$ definită pe alfabetul Σ şi care ia valori într-o mulţime S oarecare având o structură de semigrup se extinde în mod unic la un homomorfism h: $\Sigma^+ \to S$. Cu aceste precizări putem demonstra *teorema 1.2*

Teorema 1.2 Mulţimea Σ^+ dotată cu operaţia de concatenare ^ formează un semigrup liber generat de alfabetul Σ.

Demonstraţie: 1) *Existenţa*: evident, Σ^+ este generat de Σ (prin definiţie fiecare cuvânt este un şir finit de simboluri din Σ concatenate).
Acum, fie o funcţie h_0: $\Sigma \to S$, unde $(S, \bullet)$ este un semigrup oarecare şi fie $w = a_0 \ldots a_n \in \Sigma^+$ un cuvânt oarecare. Definim funcţia

$$h: \Sigma^+ \to S,$$
$$h(w) = h(a_0 \ldots a_n) = h_0(a_0) \bullet \ldots \bullet h_0(a_n) \text{ pentru orice } a_0, \ldots, a_n \in \Sigma.$$

Din definiţia funcţiei h rezultă că aceasta este un homomorfism care coincide cu funcţia h_0 pentru toate elementele lui Σ^+ ($h{\restriction}\Sigma = h_0$).

2) *Unicitatea*: să presupunem că ar exista două homomorfisme h_1: $\Sigma^+ \to S$ şi h_2: $\Sigma^+ \to S$ astfel încât $h_1{\restriction}\Sigma = h_2{\restriction}\Sigma = h_0$.

Fie $w = a_0 \dots a_n \in \Sigma^+$, $a_0, \dots, a_n \in \Sigma$. În aceste condiţii,

$$h_1(w) = h_1(a_0 \dots a_n) \text{ [definiţia lui } w]$$
$$= h_1(a_0)\bullet\dots\bullet h_1(a_n) \text{ [definiţia homomorfismului]}$$
$$= h_0(a_0)\bullet\dots\bullet h_0(a_n) \ [h_1\upharpoonright\Sigma = h_0]$$
$$= h_2(a_0)\bullet\dots\bullet h_2(a_n) \ [h_2\upharpoonright\Sigma = h_0]$$
$$= h_2(a_0 \dots a_n) \text{ [definiţia lui } h_2]$$
$$= h_2(w) \text{ [definiţia lui } w]$$

Proprietatea de universalitate a semigrupurilor liber generate conţine un indiciu cu privire la importanţa lor în logică: dacă demonstrăm, de pildă, că mulţimea variabilelor propoziţionale liber generează mulţimea formulelor calculului propoziţional, atunci, în virtutea proprietăţii de unviversalitate, orice funcţie de valuare definită pe mulţimea variabilelor propoziţionale poate fi extinsă în mod unic la o funcţie de valuare pe mulţimea formulelor calculului propoziţional considerat.

O bună întrebare în acest punct al prezentării este dacă există semigrupuri liber generate care au o strucură diferită de cea a semigrupurilor liber generate de un alfabet Σ. Răspunsul este 'nu' iar pentru a demonstra că orice semigrup liber generat este izomorf cu un semigrup de cuvinte Σ^+ peste un alfabet Σ, adecvat ales, să demonstrăm, ca un rezultat intermediar, că orice semigrup este imaginea homomorfică a unui semigrup (Σ^+ ^) de cuvinte liber generat.

Lema 1.3. Pentru orice semigrup oarecare $(S, \cdot)$ există un alfabet Σ astfel încât h: $\Sigma^+ \rightarrow S$ este un homomorfism surjectiv (epimorfism).

Demonstraţie: fie X mulţimea generatorilor lui S (la limită putem considera că $X = S$) şi fie Σ un alfabet astfel încât $\overline{\Sigma} = \overline{X}$ unde prin $\overline{\Sigma}$, $\overline{X}$ am notat cardinalul mulţimii Σ, respectiv X. Definim o funcţie bijectivă h_0: $\Sigma \rightarrow X$. Conform *teoremei 1.2*, h_0 se extinde în mod unic la h: $\Sigma^+ \rightarrow S$. Să demonstrăm că h este un epimorfism (adică un homomorfism surjectiv). Fie un element oarecare $x \in S$. Pentru că X este mulţimea generatorilor lui S orice astfel de element $x \in S$ se poate scrie ca un produs finit de elemente din X, $x = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Dar h_0 este, prin construcţie, o funcţie bijectivă definită pe Σ şi cu valori în X, aşadar, fiecare $x_i \in X$, $i \in \overline{1, n}$ este imaginea prin h_0 a unui element $a_i \in \Sigma$, $i \in \overline{1, n}$, adică pentru orice $x_i \in X$ $i \in \overline{1,n}$ există un $a_i \in \Sigma$, $i \in \overline{1,n}$ astfel încât $x_i = h(a_i)$, de unde deducem că $x = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = h_0(a_1) \cdot h_0(a_2) \cdot \ldots \cdot h_0(a_n) = h(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n)$ (ultima egalitate se obţine din definiţia lui h). Cum x a fost un element oarecare din S, rezultă că pentru orice $x \in S$ avem $x = h(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n)$, aşadar h este o funcţie surjectivă.

Lema 1.4. Orice semigrup $(S, \cdot)$ liber generat de mulţimea $X \subseteq S$ este izomorf cu un semigrup de cvuvinte $(\Sigma^+ \wedge)$.

Demonstraţie: Fie Σ un alfabet astfel încât $\overline{\Sigma} = \overline{X}$ şi o funcţie bijectivă: h_0: $\Sigma \rightarrow X$. Conform *lemei 1.3*, h_0 se extinde la un epimorfism h: $\Sigma^+ \rightarrow S$. Dar, din bijectivitatea funcţiei h_0 rezultă că există o funcţie bijectivă g_0: $X \rightarrow \Sigma$, ceea ce, împreună cu condiţia că $(S, \cdot)$ este liber generat de mulţimea X, ne asigură, conform demonstraţiei *lemei 1.3*, că g_0 se extinde la un epimorfism unic g: $S \rightarrow \Sigma^+$. Fie acum funcţia $g \circ h$: $\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$. Evident $g \circ h$ este un epimorfism iar $g \circ h \upharpoonright \Sigma = i_\Sigma$ de unde putem deduce că $g \circ h = i_{\Sigma^+}$. Printr-un argument similar deducem că $h \circ g = i_S$, aşadar h este o bijecţie.

Liber generare şi unicitatea factorizării

Cum anume putem determina dacă o structură este liber generată sau nu? Un criteriu de determinare a liber generării unui semigrup $(S, \bullet)$ este dat existenţa unei factorizări unice sau a unei 'citiri unice' a oricărui element $x \in S$ al semigrupului, peste mulţimea $X \subseteq S$ a generatorilor lui S.

Fie $(S, \bullet)$ un semigrup şi X mulţimea generatorilor lui S. Spunem despre un element $x \in S$ că are o descompunere unică peste X, dacă $\exists!$ $a_1, \ldots, a_n \in X$ astfel încât $x = a_1 \bullet \ldots \bullet a_n$, mai precis, pentru orice $b_1, \ldots, b_m \in X$, dacă $x = b_1 \bullet \ldots \bullet b_m$, atunci $m = n$ şi $a_i = b_i$, pentru orice $i \in \overline{1,n}$.

Exerciţiu: argumentaţi că semigrupul $(\Sigma^+ \wedge)$ are proprietatea factorizării sau citirii unice.

Criteriul menţionat mai sus de determinare a liber generării unui semigrup este fundamentat de următoarea teoremă:

Teorema 1.3 Semigrupul (S, •) este liber generat de o submulţime $X \subseteq S$ dacă şi numai dacă orice element $x \in S$ are o descompunere unică peste X.

Demonstraţie: ($\Rightarrow$) dacă (S, •) este liber generat, atunci, conform *lemei 1.4* există un semigrup (Σ^+ ^) izomorf cu (S, •). Dar semigrupul (Σ^+ ^) are proprietatea că fiecare element are o descompunere unică, prin urmare orice element $x \in S$ are o descompunere unică peste X.

($\Leftarrow$) să presupunem că (S, •) este un semigrup astfel încât orice element $x \in S$ are o descompunere unică peste X. Conform *lemei 1.3* există un alfabet Σ şi o funcţie bijectivă h_0: $\Sigma \rightarrow X$ care se extinde în mod unic la un epimorfism h: $\Sigma^+ \rightarrow S$. Să demonstrăm că h este un izomorfism. Singura proprietate pe care mai trebuie să o probăm este injectivitatea. Să presupunem că $h(w_n) = h(w_m)$, unde $w_n = a_1$^...^a_n şi $w_m = b_1$^...^b_m. Evident, $h(w_n) = h(w_m) = x$, pentru un anumit element $x \in S$. Pentru că h este un homomorfism rezultă că $h(w_n) = h(a_1$^...^$a_n) = h_0(a_1)$•...•$h_0(a_n)$ şi $h(w_m) = h(b_1$^...^$b_m) = h_0(b_1)$• ... •$h_0(b_m)$. Dar, din presupunerea că $h(w_n) = h(w_m) = x$ rezultă $h_0(a_1)$•...•$h_0(a_n) = h_0(b_1)$• ... •$h_0(b_m) = x$. Din faptul că h_0: $\Sigma \rightarrow X$ este o funcţie bijectivă şi că orice element $x \in S$ are o descompunere unică peste X, rezultă că $m = n$, $a_i = b_i$, pentru orice $i \in \overline{1,n}$. Prin urmare, din presupunerea că (S, •) este un semigrup astfel încât orice element $x \in S$ are o descompunere unică peste X am dedus că acesta este izomorf cu un semigrup (Σ^+ ^). Cum (Σ^+ ^) este liber generat de alfabetul Σ rezultă că şi (S, •) este liber generat.

Să recapitulăm ce am obţinut până acum: existenţa unei extensii homomorfice unice este sinonimă cu factorizarea unică a elementelor unui semigrup peste mulţimea generatorilor săi, sau cu unicitatea citirii elementelor structurii considerate. Prin urmare, pentru a stabili existenţa unei extensii homomorfice a unui semigrup este suficient să stabilim o teoremă de citire unică a elementelor acelui semigrup iar când vom descrie limbajul logicii propoziţiilor şi al predicatelor vom specifica cîteva criterii care reprezintă condiţii necesare şi suficiente pentru a stabili citirea unică a cuvintelor peste alfabetele considerate.

Unul dintre aspectele importante ale modului în care se pot genera cuvinte peste un alfabet este dependenţa mulţimii tuturor cuvintelor peste un alfabet, de mulţimea alfabetului respectiv. Mai precis, dacă un anumit alfabet are finit sau infinit numărabil de multe simboluri (adică este cel mult numărabil), atunci mulţimea cuvintelor peste acest alfabet nu poate fi decât infinit numărabilă.

Pornind de la această constatare, putem deduce că un alfabet cel mult numărabil nu poate genera o mulţime infinit nenumărabilă de cuvinte peste acel alfabet. Următoarea teoremă exprimă mai precis această dependenţă:

Teorema 1.4 Dacă Σ este un alfabet cel mult numărabil atunci mulţimea cuvintelor peste acel alfabet, Σ*, este numărabilă.

Demonstraţie (schiţă): Notăm cu $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, şirul crescător al primelor n numere prime[12]. Astfel, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ... p_n = al n-lea număr prim. Fie un alfabet oarecare cel mult numărabil, $\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, dacă alfabetul este finit, sau $\Sigma = \{a_1, a_2, ... \}$, dacă alfabetul este infinit. Tot ceea ce presupunem despre elementele acestui alfabet este că nici unul dintre ele nu este produsul altor elemente ale alfabetului. Construim o funcţie definită pe mulţimea cuvintelor formate peste alfabetul Σ şi valori în mulţimea numerelor naturale, astfel:

$$f: \Sigma^* \to \mathbb{N},$$
$$(1)\, f(\varepsilon) = 1;$$
$$(2)\, f(a_{i_1}\ a_{i_2}\ \ldots\ a_{i_n}) = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{i_n}.$$

Construcţia funcţiei ne asigură de injectivitatea ei şi, de aici, de numărabilitatea mulţimii Σ*.

Exerciţii:

1) Demonstraţi că semigrupul $(\mathbb{N}, +)$ este liber generat de submulţimea $X = \{1\}$.

2) Determinaţi dacă semigrupul $(\mathbb{Z}, +)$ este liber generat de submulţimea $X = \{1,-1\}$.

3) Fie semigrupul $(\mathbb{Z}_5\ \oplus)$, cu $X = \{[1]\}$ şi semigrupul $(\mathbb{N}, +)$. Demonstraţi că funcţia h_0: $X \to \mathbb{N}$, $h_0([1]) = 1$ nu determină o extensie homorfică h: $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{N}$.

4) Demonstraţi că semigrupul (S ={*acab*, *aaba*, *aba*} ^) nu este liber generat folosindu-vă de echivalenţa dintre liber generare şi unicitatea factorizării.

5) Demonstraţi că semigrupul (S ={*aba*, *bab* } ^) este liber generat folosindu-vă de echivalenţa dintre liber generare şi unicitatea factorizării.

6) Fie un alfabet $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, ...,\}$ şi o funcţie α o funcţie ce asociază fiecărui simbol $a_i \in \Sigma$ al i-lea număr prim, α: $\Sigma \to \mathbb{N}$, $\alpha(a_i) = p_i$. Definim funcţia de codificare β în următorul mod:

---

[12] Reamintim că un număr este prim dacă are numai doi divizori diferiţi, respectiv 1 şi numărul însuşi.

$$\beta: \Sigma^* \to \mathbb{N},$$
$$(1)\ \beta(\varepsilon) = 1;$$
$$(2)\ \beta(a_{i_1}\ a_{i_2}\ \ldots\ a_{i_n}) = [\alpha(a_{i_1}) + 1]\hat{}[\alpha(a_{i_2}) + 1]\hat{}\ldots\hat{}[\alpha(a_{i_n}) + 1].$$

Acum, considerați următorul citat 'Astfel, pentru $A_9 = \{a, b, c\}$ vom avea $\alpha(a) = 2$, $\alpha(b) = 3$, $\alpha(c) = 5$. Cuvântul *caba* în A_9 va fi redat prin *5232* iar $\beta(caba) = 6343$ (fiecare număr prim asociat unei litere din cuvânt a fost mărit cu 1)'[13]. Extindeți alfabetul A_9 din citatul de mai sus până la litera *n*, pentru a obține $A_{14} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$.

a) Identificați două cuvinte formate cu simboluri din A_{14} cărora funcția β le atribuie același număr.

b) Găsiți o demonstrație generală a faptului că funcția β nu este injectivă

SISTEME DE GENERARE

În acest capitol ne vom concentra atenția asupra elaborării unui cadru conceptual[14] mai general care să ne permită studierea limbajului calculului propozițional și a logicii de ordinul I precum și demonstrarea unor rezultate care justifică folosirea definițiilor recursive și a demonstrațiilor prin inducție în cele două sisteme logice.

Ideea directoare a elaborării sistemelor de generare este 1) de a facilita studiul sistematic al modalității în care elementele unei mulțimi sunt generate de o submulțime a acesteia sub acțiunea unor funcții și 2) de a determina proprietățile generale ale acestor sisteme.

Definiție 1.1: Fie X o mulțime. Numim o *funcție de mulțimi* de aritate k orice funcție de tipul $f^k: X^k \to \mathbb{P}(X)$, unde $\mathbb{P}(X)$ este mulțimea putere a mulțimii X.

---

[13] Cornel Popa [1992], *Logica predicatelor*, București: Hyperion, p. 208.

[14] O sursă utilă în acest scop, pe care am urmărit-o și elaborat-o în expunerea sistemelor de generare, este reprezentat de manuscrisul lui Joseph R. Mileti, *Mathematical logic for mathematicians*, disponibil la http://math.berkeley.edu/~antonio/math125A/mathlogicP1.pdf.

Fie X o mulţime, $Y \subseteq X$ o submulţime a lui X şi F o mulţime de funcţii astfel încât pentru orice $f_i^k \in F$, $i \in \mathbb{N}^*$, şi orice aritate $k \in \mathbb{N}^*$, $f_i^k : X^k \to X$. Numim tripletul (X, Y, F) un *sistem simplu de generare*.

Exemplu: sistemul ($\mathbb{R}$, $\{7\}$, F), unde $F = \{f\}$, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ este un sistem simplu de generare.
În continuare vom nota prin F_k mulţimea tuturor funcţiilor de aritate k din F.

Fie X o mulţime, $Y \subseteq X$ o submulţime a lui X şi F o mulţime de funcţii de mulţimi, unde pentru orice $f_i^k \in F$, $i \in \mathbb{N}^*$, şi orice aritate $k \in \mathbb{N}^*$, avem $f_i^k : X^k \to \mathbb{P}(X)$. Numim tripletul ($X$, Y, F) un *sistem de generare*.

Se observa că orice *sistem simplu de generare* (X, Y, F) se reduce la un *sistem de generare* (X, Y, F'): orice funcţie f: $X^k \to X$ poate fi definită în termenii unei funcţii de mulţimi f': $X^k \to \mathbb{P}(X)$ prin egalitatea $f'(x_1 ... x_k) = \{f(x_1 ... x_k)\}$.

Exemplu: Fie sistemul ($\mathbb{R}$, $\{7\}$, F), unde $F = \{f\}$, $f(x) = 2x$. Definim funcţia f', f': $\mathbb{R} \to \mathbb{P}(\mathbb{R})$, ca funcţie de mulţimi, prin relaţia: $f'(x) = \{f(x)\}$. Astfel, valorile obişnuite ale funcţiei f sunt numere reale, de pildă, $f(7) = 14$, $f(14) = 28$, iar valorile funcţiei f' sunt mulţimile formate din aceste elemente, adică $f'(7) = \{14\}$, $f'(14) = \{28\}$

Există mai multe posibilităţi de a defini modul în care mulţimea Y generează elemente din mulţimea X prin acţiunea funcţiilor din F, dar noi vom discuta, în continuare, doar două, corespunzătoare modului în care am determinat elementele unui semigrup S generate de o submulţime X a acestuia prin intermediul operaţiei semigrupului.

Fie (X, Y, F) un sistem de generare şi $J \subseteq X$ astfel încât:

i) $Y \subseteq J$ şi

ii) dacă $x_1, ..., x_k \in J$, atunci $f(x_1 ... x_k) \subseteq J$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ şi $f \in F_k$.

În aceste condiţii, spunem despre mulţimea J că este o *mulţime inductivă*.

Bineînţeles, faptul de a defini ceva nu înseamnă automat şi că acel ceva există. Existenţa obiectului definiţiei trebuie probată.

Propoziţie: Orice sistem de generare (X, Y, F) conţine o mulţime inductivă.
Demonstraţie: printr-o verificare elementară putem observa că mulţimea X respectă condiţiile *definiţiei 1.14*, aşadar, la rigoare, mulţimea X este o mulţime inductivă.

Acum, ceea ce *definiţia 1.14* ne oferă este doar primul pas spre delimitarea obiectivului nostru. Să lămurim acest obiectiv printr-un exemplu: Fie sistemul de generare ($\mathbb{R}$, $\{0\}$, F), $F = \{f\}$, unde $f(x) = x + 1$. Mulţimile $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{Z}$ sunt inductive (*exerciţiu*!), însă ceea ce ne interesează, de fapt, este să determinăm cea mai mică dintre mulţimile inductive ale sistemului ($\mathbb{R}$, $\{0\}$, F), în acest caz, mulţimea $\mathbb{N}$. În acest scop, vom adopta o strategie similară celei în care am tratat semigrupurile, respectiv vom defini 'de sus în jos' cea mai mică submulţime I a tuturor mulţimilor inductive J ale unui sistem de generare (X, Y, F).

Fie (X, Y, F) un sistem de generare şi $M \subseteq \mathbb{N}$. Notăm cu I intersecţia *tuturor mulţmilor inductive* J_m, $m \in M$, ale sistemului (X, Y, F). Formal, $I = \bigcap_{m \in M} \{J_m$, J_m este o mulţime inductivă$\}$.

Evident, trebuie să stabilim dacă o astfel de mulţime există, este inductivă, şi unică.

Teorema 1.5 Fie (X, Y, F) un sistem de generare. În aceste condiţii, submulţimea I există, este inductivă şi unică.

Demonstraţie: 1) *existenţa*: la limită $I = X$.
2) *inductivitatea*: pentru că fiecare mulţime J_m este inductivă, rezultă, conform *definiţiei 1.14*, că $Y \subseteq J_m$, pentru orice $m \in M$, $M \subseteq \mathbb{N}$, de unde rezultă, mai departe, că $Y \subseteq I$. Mai trebuie să stabilim că $f(x_1 \dots x_k) \subseteq I$ în toate situaţiile în care $x_1, \dots, x_k \in I$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ şi $f \in F_k$. Să presupunem, aşadar, că $x_1, \dots, x_k \in I$. Conform *definiţiei 1.15*, $x_1, \dots, x_k \in J_m$, pentru orice $m \in M$. Conform *definiţiei 1.14* dacă $x_1, \dots, x_k \in J_m$, atunci $f(x_1 \dots x_k) \subseteq J_m$, aşadar, dacă $x_1, \dots, x_k \in J_m$, pentru orice $m \in M$, atunci, în virtutea inductivităţii mulţimilor J_m, $f(x_1 \dots x_k) \subseteq J_m$, pentru orice $m \in M$, ceea ce revine, conform *definiţei 1.15* la a afirma că $f(x_1 \dots x_k) \subseteq I$.
3) *unicitatea*: să presupunem că ar exista două mulţimi I_1 şi I_2 care satisfac *definiţia 1.15*. La punctul 2) am stabilit că cele două mulţimi I_1 şi I_2 sunt inductive, prin

urmare, pentru fiecare mulţime inductivă J, $I_1 \subseteq J$ şi $I_2 \subseteq J$. În aceste condiţii, vom avea $I_1 \subseteq I_2$ şi $I_2 \subseteq I_1$, aşadar $I_1 = I_2$.

În continuare, vom nota cea mai mică submulţime inductivă I a unui sistem (X, Y, F) prin $I(X, Y, F)$ sau simplu I.

Cea de-a doua strategie de a caracteriza modul în care mulţimea Y generează elemente din mulţimea X prin acţiunea funcţiilor din F este una constructivă, 'de jos în sus', în care pornim de la mulţime de baza, Y, şi construim un şir succesiv de mulţimi, astfel încât elementele dintr-o mulţime nouă sunt imaginile prin funcţiile din F ale elementelor din mulţimile deja construite.

Fie (X, Y, F) un sistem de generare şi fie un şir de mulţimi $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ definit în următorul mod:

$V_0 = Y$

$V_{n+1} = V_n \cup \{x \in X \,/\, \text{există } k \in \mathbb{N}^*, f \in F_k \text{ şi } x_1, \ldots, x_k \in V_n, \text{ astfel încât } x \in f(x_1 \ldots x_k)\}$

Notăm cu $V = V(X, Y, F) = \bigcup_{n \in N} V_n$.

Din definiţie decurg următoarele observaţii:

1) dacă $m \leq n$, atunci $V_m \subseteq V_n$.

2) pentru orice $x \in V$, fie $x \in Y$, fie există $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in F_k$ şi $x_1, \ldots, x_k \in V$ astfel încât $x \in f(x_1 \ldots x_k)$.

Similar modalităţii prin care am demonstrat că cele două procedee de a defini semigrupurile generate de o mulţime sunt echivalente, vom demonstra, în continuare, că cele două strategii de a caracteriza elementele generate de un sistem de generare (X, Y, F) sunt echivalente.

Teorema 1.6 Fie (X, Y, F) un sistem de generare. În aceste condiţii, $I(X, Y, F) = V(X, Y, F)$

Demonstraţie: evident, vom proceda prin a demonstra dubla incluziune.

1. Să demonstrăm că $I(X, Y, F) \subseteq V(X, Y, F)$, ceea ce revine la a demonstra că $V(X, Y, F)$ este o mulţime inductivă. În acest scop să observăm că

a) $Y = V_0 \subseteq V(X, Y, F)$ (definiţia mulţimii $V(X, Y, F)$)

b) să presupunem că există $x_1, \ldots, x_k \in V$, $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in F_k$. Din construcţia lui V, rezultă că orice element din V aparţine unui anumit V_n, adică pentru orice $i \in \overline{1,k}$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_i \in V_n$. Fie acum un element x_i, $i \in \overline{1,k}$, $x_i \in V_n$ astfel încât pentru orice x_j, $j \in \overline{1,k}$, $x_j \neq x_i$, $x_j \in V_m$, să obţinem că $V_m \subseteq V_n$, altfel spus, fie un element care aparţine acelei mulţimii V_n din ierarhia V care include toate celelalte elemente $x_1, \ldots, x_{k-1}$ diferite de acesta. În acord cu *definiţia 1.16*, mulţimea V_{n+1} va include şi imaginea $f(x_1 \ldots x_k)$, prin urmare $f(x_1 \ldots x_k) \subseteq V$.

Din a) şi b) rezultă că V este o mulţime inductivă, aşadar, $I(X, Y, F) \subseteq V(X, Y, F)$.

2. Să demonstrăm că $V(X, Y, F) \subseteq I(X, Y, F)$, ceea ce revine la a demonstra că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $V_n \subseteq I(X, Y, F)$. În acest scop să observăm că:

c) $V_0 = Y \subseteq I(X, Y, F)$ (definiţia mulţimii $I(X, Y, F)$).

d) să presupunem că există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $V_n \subseteq I(X, Y, F)$ şi să demonstrăm că $V_{n+1} \in I(X, Y, F)$. Fie un $k \in \mathbb{N}^*$, fie orice $f \in F_k$ şi $x_1, \ldots, x_k \in V_n$. Din ipoteza că $V_n \subseteq I(X, Y, F)$ rezultă că $x_1, \ldots, x_k \in I(X, Y, F)$. Acum, conform definiţiei mulţimilor inductive (iar I este o mulţime inductivă – cea mică mulţime) dacă $x_1, \ldots, x_k \in I(X, Y, F)$, atunci $f(x_1 \ldots x_k) \subseteq I(X, Y, F)$. Prin urmare, din presupunerea că există un $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in F_k$ şi $x_1, \ldots, x_k \in I(X, Y, F)$ decurge că şi $f(x_1 \ldots x_k) \subseteq I(X, Y, F)$, ceea ce înseamnă că $V_{n+1} \subseteq I(X, Y, F)$.

Din c) şi d) rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $V_n \subseteq I(X, Y, F)$.

În continuare vom nota mulţimea $I(X, Y, F) = V(X, Y, F) = G(X, Y, F) = G$. Importanţa *teoremei 1.6* este dată de faptul că putem folosi oricare dintre cele două moduri (echivalente) de a caracteriza elementele mulţimii $G(X, Y, F)$ în demonstraţiile ulterioare. Putem, de pildă, să identificăm orice mulţime inductivă $A \subseteq G$ cu G ceea ce reprezintă un atuu dacă vrem să demonstrăm că elementele mulţimii G au anumite proprietăţi. Nucleul demonstraţiei constă în a arăta că A este o mulţime inductivă ale cărei elemente au o anumită proprietate. Pentru că $G = I$, şi A este o mulţime inductivă, $G \subseteq A$. Dar A este o submulţime a lui G, prin urmare $A = G$, aşadar toate elementele lui G au proprietatea respectivă. Toată pirueta argumentativă de mai sus se traduce, de fapt, în posibilitatea utilizării principiului inducţiei structurale în argumentele care privesc elementele mulţimii G. Iar demonstraţia acestui fapt este prezentată mai jos:

Lema 1.5. Fie $G(X, Y, F)$ un sistem de generare. Să presupunem că $A \subseteq X$ satisface cerinţele:

1. $Y \subseteq A$ şi
2. $f(x_1 \ldots x_k) \subseteq A$ în toate situaţiile în care $x_1, \ldots, x_k \in A$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi $f \in F_k$.

În aceste condiţii $G \subseteq A$.

Demonstraţie: pentru că A este o mulţime inductivă, e suficient să identificăm $G = I$, de unde decurge că $G = I \subseteq A$.

Fie sistemul $(\mathbb{R}, \{5\}, F)$, unde $F = \{f\}$, $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Care este, în acest caz, $G(\mathbb{R}, \{5\}, F)$? Intuitiv, este mulţimea: $\{5, 10, 20, 40 \ldots\}$, sau formal $X = \{5 \cdot 2^n, n \in \mathbb{N}\}$. Evident, pentru a putea folosi reprezentarea mulţimii G ca $\{5 \cdot 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ ne trebuie mai mult decât o intuiţie, ne trebuie o demonstraţie că $X = G$. Demonstraţia nu este complicată şi presupune să demonstrăm dubla incluziune: $X \subseteq G$ şi $G \subseteq X$.

În acest exemplu, reprezentarea lui G a fost clară datorită intuiţiei, dar în multe cazuri, lipsa intuiţiei conduce la o deficienţă de reprezentare.

Principala problemă de care ne vom ocupa în continuare este determinarea criteriilor care califică mulţimile G generate de sistemele de generare[15] ca mulţimi peste care putem defini în mod recursiv funcţii. Iar modalitatea prin care ne putem asigura că definirea recursivă a funcţiilor este un procedeu viabil peste mulţimea G constă în a demonstra că există o unică extensie homomorfică de la mulţimea generată G la o altă mulţime M, pornind, bineînţeles, de la existenţa unei funcţii oarecare definită pe submulţimea generatorilor $Y \subseteq X$ şi cu valori în M. În termenii secţiunii anterioare, ceea ce vrem să determinăm în continuare sunt condiţiile necesare şi suficiente ca un sistem de generare să aibă proprietatea universalităţii, adică să determinăm condiţiile necesare şi suficiente ca mulţimea G, generată de un sistem oarecare (X, Y, F), să fie liber generată de acel sistem. Intuiţia cizelată de rezultatele secţiunii anterioare ne va face să bănuim că libera generare va fi

[15] Ne vom mărgini în continuare la sistemele simple de generare.

asigurată de unicitatea factorizării. Dar până să consolidăm matematic această intuiţie, să facem observaţia nontrivială că nu orice mulţime G generată de un sistem simplu de generare permite definirea recursivă a unor funcţii.

Teorema 1.7 Fie (X, Y, F) un sistem simplu de generare, o mulţime A, o funcţie $i: Y \to A$, şi pentru fiecare $f \in F_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, să presupunem că există o funcţie[16] $g: A^k \to A$. În aceste condiţii, nu există o unică funcţie $h: G \to A$ astfel încât:

i) $h(x) \upharpoonright Y = i(x)$

ii) $h(f(x_1 \ldots x_k)) = g(h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_k))$, pentru orice $x_1, \ldots, x_k \in G$.

Demonstraţie: fie sistemul simplu de generare ($X = \{1, 2\}$, $Y = \{1\}$, $F = \{f\}$), unde $f: X \to X$ este definită de următoarele egalităţi: $f(1) = 2, f(2) = 1$, şi fie $A = \mathbb{N}$, $i: Y \to A$, $i(1) = 1$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = n+1$. Să demonstrăm că nu există nici o funcţie $h: G \to \mathbb{N}$ astfel încât condiţiile *i*) şi *ii*) să fie îndeplinite.

Să observăm că $G = X = \{1, 2\}$. Conform cu *i*) avem $h(1) = i(1) = 1$. Conform cu *ii*) avem $h(2) = h(f(1)) = g(h(1)) = h(1) + 1 = 1 + 1 = 2$. Dar funcţia f ne permite să calculăm valoarea $h(1)$ şi într-un alt mod, respectiv $h(1) = h(f(2)) = g(h(2)) = h(2) + 1 = 2 + 1 = 3$. Dar puţin mai sus am stabilit că $h(1) = 1$ iar din cele două atribuiri diferite $h(1) = 3$ şi $h(1) = 1$ rezultă că $h: G \to \mathbb{N}$, definită de condiţiile i) şi ii) nu este o funcţie.

O analiză atentă a demonstraţiei de mai sus ne arată că eşecului funcţiei h de a constitui o extensie homomorfică constă în faptul că unele elemente ale lui G sunt generate în două moduri distincte, iar mecanismul prin care funcţia h atribuie valori elementelor lui G face ca această funcţie să atribuie produselor acestor moduri distincte de generare valori care intră în conflict. Soluţia la îndemână, aşa cum cititorul avizat al secţiunii anterioare a intuit deja, este înlăturarea sistemelor care permit multiple generări distincte ale elementelor. Ceea ce obţinem la sfârşitul

[16] Din motive tehnice, ce ţin de evitarea circularităţii în definirea recursivă a funcţiilor, ar trebui să apelăm la un artificiu matematic şi să definim această funcţie în următorii termeni: $g: (X \times A)^k \to A$. Subsecvent, în demonstraţie, ar trebui să substituim ocurenţele şi argumentele funcţiei definite în text cu cele corespunzătoare definiţiei din această notă de subsol: de pildă, condiţia ii) din *teorema 1.7* s-ar traduce prin $h(f(x_1 \ldots x_k)) = g(x_1, h(x_1), x_2, h(x_2), \ldots, x_k, h(x_k))$, pentru orice $x_1, \ldots, x_k \in G$, iar explicitarea relaţiei de corespondenţă $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = n+1$, prin $g: (X \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, $g(x, n) = n+1$.

acestei 'epurări' sunt sisteme care au proprietatea unicităţii factorizării sau unicităţii cititirii, despre care spuneam în secţiunea anterioară că, atât cât priveşte semigrupurile, sunt echivalente cu liber generarea. Demonstrarea acestei echivalenţe şi în cazul sistemelor simple de generare va constitui nucleul acestei secţiuni, iar rezultatul poartă numele de *teorema recursivităţii*. Dar până atunci să introducem câteva definiţii pentru a preciza matematic principale concepte implicate în teorema recursivităţii.

(*Citirea unică*) Un sistem $G(X, Y, F)$ are proprietatea citirii unice, dacă:

i) pentru orice $f \in F_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, $f(G^k) \cap Y = \varnothing$

ii) pentru orice $f \in F_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, la $f \upharpoonright G$ este injectivă

iii) pentru orice $f_i \in F_m$, $i, m \in \mathbb{N}^*$ şi $f_j \in F_n$, $n, j \in \mathbb{N}^*$, $f_i \neq f_j$, $f_i(G^m) \cap f_j(G^n) = \varnothing$.

Caracterizarea sistemelor descrise de definiţia de mai sus ca fiind sisteme care au proprietatea citirii unice încalcă tradiţia matematică moştenită, care califică acest tip de sisteme drept 'liber generate'[17]. Motivele pentru care am optat să deviez de la calificările matematice tradiţionale ale acestor sisteme sunt: 1) pentru a păstra terminologia instituită în secţiunea anterioară, unde am descris semigrupurile liber generate ca fiind cele care au proprietatea universalităţii, adică sunt structuri în care există o unică extensie homomorfică corespunzătoare fiecărei funcţii definită pe mulţimea generatorilor şi cu valori într-un semigrup oarecare şi 2) este mult mai natural să descriem aceste sisteme ca având proprietatea citirii unice sau factorizării unice, pentru că, în fond, ceea ce caracterizează condiţiile i) – iii) sunt sistemele în care generarea elementelor este unică. Demonstraţia suficienţei condiţiilor citirii unice pentru a califica acel sistem drept liber generat, adică un sistem ce are proprietatea universalităţii este scopul aşa-numitei teoreme a recursivităţii.

Cum anume se leagă problema definirii recursive a funcţiilor de existenţa unei extensii homomorfice h? Pentru a răspunde la această întrebare să precizăm cum se definesc recursiv funcţiile. În general, pentru a defini recursiv o funcţie h: $G(X, Y, F) \to M$ avem nevoie de:

[17] Aşa cum îl califică, de pildă, Herbert B. Enderton, [2001] *A Mathematical Introduction to Logic*, ediţia a II-a, San Diego: Harcourt Academic Press, p. 39 şi Jean H. Gallier [2003], *Logic for computer science – Foundation for automated theorem proving*, carte accesibilă la adresa http://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/logic.html, p. 21.

1) o procedură de calcul pentru $h(x)$, unde $x \in Y$

2) o procedură de calcul pentru $h(f(x_1 \dots x_k))$ specificată în termenii valorilor $h(x_1)$, …, $h(x_n)$ oricare ar fi $f \in F_k$, $x_1, \dots x_k \in G^k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Definiţia de mai jos surprinde aceste două cerinţe sub forma condiţiilor *i*) şi *ii*)

(*liber generare*) Fie $G(X, Y, F)$, M o mulţime oarecare, F_M o mulţime de funcţii similară mulţimii F dar definită pe M (adică $g_i^k \in F_M$, $i, k \in \mathbb{N}^*$, dacă $g_i^k : M^k \to M$) şi fie o funcţie c: $F \to F_M$, $c(f^k) = g^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, unde evident $f^k \in F$ şi $g^k \in F_M$. Spunem că $h : G \to M$ este *definită recursiv* dacă îndeplineşte următoarele condiţii, pentru orice funcţie $h_0 : Y \to M$: *i*) $h \restriction Y = h_0$.

ii) $h(f(x_1 \dots x_k)) = g(h(x_1) \dots h(x_k))$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k \in F$, $x_1, \dots, x_k \in G$ şi $g^k = c(f^k)$.

Se observă acum, că definirea recursivă a unei funcţii h: $G(X, Y, F) \to M$ se reduce la existenţa unei extensii homomorfice unice h de la Y la M. Aşadar, demonstraţia existenţei unei astfel de extensii homomorfice unice garantează posibilitatea definirii recursive a funcţiilor. Strategia prin care ajungem să caracterizăm sistemele simple de generare care permit definirea recursivă a funcţiilor este, în acest punct al discuţiei, destul de evidentă: vom demonstra că sistemele care au proprietatea citirii unice sunt liber generate, adică admit existenţa unei extensii homomorfice unice, ceea ce garantează posibilitatea definirii prin recursivitate a funcţiilor în aceste sisteme.

Teorema 1.8 *Teorema recursivităţii*: Dacă (X, Y, F) are proprietatea citirii unice, atunci este liber generat.

Mai precis, dacă $G(X, Y, F)$ este mulţimea generată de un sistem simplu de generare având proprietatea citirii unice, M, F_M şi c au specificaţiile din *definiţia 1.18* şi $h_0 : Y \to M$ este o funcţie oarecare, atunci există un unic homomorfism h: $G \to M$ care îndeplineşte condiţiile *i*) şi *ii*) ale *definiţiei 1.18*, adică

i) $h \restriction Y = h_0$.

ii) $h(f(x_1 \dots x_k)) = g(h(x_1) \dots h(x_k))$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k \in F$, $x_1, \dots, x_k \in G$ şi $g^k = c(f^k)$.

Nu vom demonstra teorema recursivităţii aici, dar ţinem să subliniem că argumentul implicat în demonstraţie este unul ce ţine de teoria mulţimilor, nu dificil conceptual dar întrucâtva complex şi îndrumăm cititorul interesat de demonstraţie spre câteva surse: Herbert B. Enderton, *Elements of set theory*[18], Jean H. Gallier *Logic for computer science – Foundation for automated theorem proving*[19] şi Joseph R. Mileti, *Mathematical logic for mathematicians*.

[18] Herbert B. Enderton [1977] *Elements of set theory*, New-York: Academic Press, pp. 73 – 75.
[19] Jean H. Gallier [2003], p. 22 – 23.

2 Calculul propoziţiilor

PRELIMINARII

Având stabilite rezultatele de bază despre limbajele artificiale şi sistemele de generare din capitolele anterioare suntem în măsură să articulăm riguros un sistem logic simplu, pe care, urmând tradiţia logico-matematică, îl vom numi 'calculul propoziţiilor'. Unul dintre beneficiile dezvoltării acestui calcul al propoziţiilor este, aşa cum am precizat în introducere, acela de a uşura efortul demonstrativ din secţiunile ulterioare, prin folosirea unor rezultate stabilite în acest calcul şi prin folosirea unor tehnici demonstrative care rămân coloana vertebrală a demonstraţiilor ulterioare (diferenţa dintre aplicarea acestor tehnici în calculul propoziţiilor şi aplicarea lor în logica de ordinul I constă, mai degrabă, în creşterea complexităţii).

Principalele caracteristici metateoretice asupra cărora ne vom opri în continuare sunt cele reprezentate de consistenţa şi mai cu seamă completitudinea calculului propoziţiilor. De asemenea, vom sublinia o diferenţă importantă între logica de ordinul I şi calculul propoziţiilor, respectiv faptul că logica de ordinul I este nedecidabilă în timp ce calculul propoziţiilor este un sistem logic decidabil. Diferenţa va fi subliniată prin prezentarea a două demonstraţii ale completitudinii calculului propoziţional: o demonstraţie constructivă (efectivă), şi o demonstraţie a cărei structură va fi exportată pentru stabilirea completitudinii logicii de ordinul I.

La o privire sumară asupra istoriei demonstraţiilor de completitudine ale logicii de ordinul întâi observăm că de la prima demonstraţie – cea a lui Gödel din 1930[1] – au apărut câteva demonstraţii alternative ale căror virtuţi epistemologice nu sunt de neglijat. Cea mai celebră demonstraţie alternativă este, fără îndoială, cea dată de Leon Henkin în articolul său 'The completeness of the first-order functional

[1] Kurt Gödel [1930], 'Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls', în *Monatshefte für Mathematik und Physik* 31: pp. 349-360.

calculus' din 1949[2]. Virtuţile acestei demonstraţii depăşesc simplele consideraţii epistemologice ţinând de eleganţa şi simplitatea ei, aducând în prim plan o modalitate ingenioasă de construcţie a modelului unei teorii – este vorba de a considera sintaxa sistemului ca materie primă de construcţie a modelului. De asemenea, merită subliniat că demonstraţia lui Henkin de completitudine a logicii de ordinul I se generalizează relativ uşor şi pentru logicile de ordin superior.

În 1959 Jaako Hintikka[3] a propus o demonstraţie de completitudine, înrudită cu cea dată de Henkin, care presupune construcţia unei mulţimi de formule cu anumite proprietăţi ce permit construcţia unui model al respectivelor formule. Demonstraţia lui Hintikka a fost preluată, începând cu Smullyan[4], ca demonstraţie 'standard' în expunerea logicii de ordinul întâi *via* tablouri analitice, şi, mai departe, în sistemele de deducţie naturală[5]. Împreună, cele două tipuri de demonstraţie au devenit 'canonice', majoritatea manualelor de logică prezentând una dintre ele ca demonstraţie a teoremei de completitudine. Istoric vorbind, însă, demonstraţia lui Gödel nu a fost prima demonstraţie de completitudine a unui sistem logic. În 1921 Emil Post[6] a oferit prima demonstraţie de completitudine, e drept, pentru un sistem mai restrâns decât cel al logicii de ordinul întâi, respectiv pentru calculul propoziţiilor, aşa cum acesta a fost expus în *Principia Mathematica* de către Russell şi Whitehead[7]. Curios, însă, este că demonstraţiile alternative pentru completitudinea calculului propoziţional au apărut tot după demonstraţia lui Gödel nu după demonstraţia lui Post. Una dintre aceste demonstraţii de completitudine a calculului propoziţiilor, apărută, la rândul ei, după demonstraţia lui Gödel , şi asupra căreia ne vom opri în continuare este demonstraţia lui Laszlo Kalmár[8]. Ceea ce este remarcabil în cazul acestei demonstraţii este, pe de-o parte, caracterul ei constructiv, care oferă o procedură efectivă de determinare a demonstraţiei unei

---

2 Leon Henkin Leon Henkin [1949a], 'The completeness of the first-order functional calculus' în *The Journal of Symbolic Logic* 14, pp. 159-166.

3 Jaakko Hintikka [1955], 'Form and content in quantification theory', în *Acta Philosophica Fennica*, 8, pp. 11-55.

4 Raymond Smullyan [1995], *First order logic*, New-York: Dover Publications.

5 Vezi Ian Chiswell and Wilfrid Hodges [2007], *Mathematical Logic*, Oxford: Oxford University Press.

6 Emil Post [1921], 'Introduction to a general theory of elementary propositions' în *American Journal of Mathematics* 43, pp. 163-185.

7 Bertrand Russell, Alfred Whitehead [1910], *Principia Mathematica*, Cambridge, UK: Cambridge University Press.

8 Laszlo Kalmár [1935], 'Über die Axiornatisierbarkeit des Aussagenkalküls', *Acta Scientiarum Mathematicarum* 7, pp. 222-243.

tautologii în cadrul calculului propoziţional considerat iar, pe de altă parte, simplitatea ei. De pildă, Alonzo Church, devoalând modalitatea de a demonstra completitudinea calculul propoziţiilor din cartea sa, *Introduction to Mathematical Logic*, afirmă că:

> the idea of applying Kalmár's method to this formulation of propositional calculus [the one present in § 10 of *Introduction to Mathematical Logic* n.n] was suggested to the writer by Leon Henkin as yelding perhaps the briefest available completeness proof for the propositional calculus (if based on independent axioms with *modus ponens* and substitution as rules of inference)[9]

Mai mult, Leon Henkin notează într-un articol în care generalizează procedura lui Kalmár de demonstraţie a completitudinii calculului propoziţional pentru a obţine o axiomatizare completă a oricărui fragment de logică propoziţională care conţine implicaţia printre conectorii săi primari, că:

> Of the several methods for proving the completeness of sets of axioms for the propositional calculus perhaps the simplest is due to Kalmár, although it does not appear to be widely known[10]

Primul pas în prezentarea acestor rezultate este stabilirea riguroasă a cadrului conceptual în care se vor desfăşura aceste demonstraţii. După cum menţionam şi mai sus, vom începe prin prezentarea a două demonstraţii de completitudine ale calculului propoziţional, una efectivă, a lui Laszlo Kalmár şi una neconstructivă, a lui Leon Henkin, dar de o importanţă capitală în consideraţiile ulterioare. Demonstraţia de tip Henkin a calculului propoziţiilor va fi extinsă asupra logicii de ordinul I. Dar, pentru a prezenta într-un mod riguros aceste demonstraţii trebuie să construim un sistem axiomatic al calculului propoziţional.

---

[9] Alonzo Church [1956], *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, NJ: Princeton University Press, p. 163, n. 288.

[10] Leon Henkin [1949b], 'Fragments of the propositional calculus', *Journal of Symbolic Logic*, 14, pp. 42-48.

UN SISTEM AXIOMATIC AL CALCULULUI PROPOZIŢIILOR

Un sistem axiomatic al calculului propoziţiilor (C_p) este un cvadruplu de mulţimi $C_p = \langle A, Form, Ax, R_d\rangle$ în care:

1. *A* este *alfabetul* sistemului

2. *Form* sunt *formulele bine formate* ale sistemului

3. *Ax* sunt *axiomele* sistemului

4. R_d sunt *regulile de derivare* ale sistemului.

1. Alfabetul calculului propoziţional pe care îl vom elabora în continuare este format din mulţimea variabilelor propoziţionale, mulţimea operatorilor logici, şi mulţimea formată din semnele de punctuaţie, mai precis:

a) mulţimea variabilelor propoziţionale, $Var = \{p_n : n \in \mathbb{N}^*\}$

b) operatorii logici, $O = \{\rightarrow, \neg\}$

c) semnele de punctuaţie, $P = \{(,)\}$.

În acest caz, alfabetul *A* al calculului propoziţional C_p este format din reuniunea tuturor mulţimilor de la punctele *a*) – *c*), adică, $A = \{Var \cup O \cup P\}$.

Intuitiv, variabilelor propoziţionale le corespund propoziţii simple (nedecompozabile) din limbajul natural, cărora are sens să la atribuim valori de adevăr, celor doi operatori logici '→', '¬' le corespund în limbajul natural implicaţia şi negaţia, iar semnele de punctuaţie sunt parantezele – paranteza stângă '(' şi paranteza dreaptă ')' – folosite pentru citirea unică a formulelor. După cum ştim din primul capitol al lucrării, cu alfabetul *A* al unui sistem putem forma mulţimea cuvintelor A^*, care, împreună cu operaţia de concatenare formează un semigrup liber generat. Ceea ce urmărim, în continuare, este să delimităm din mulţimea tuturor şirurilor finite de simboluri ce se pot forma cu elementele alfabetului *A*, o clasă de şiruri, care, intuitiv, reprezintă enunţurile cu sens formate cu ajutorul acestui alfabet.

În acest scop, vom defini următoarele operaţii pe mulţimea A^*:

$$f_{\neg}: A^* \rightarrow A^*,$$

$$f_{\neg}(\varphi) = (\hat{}\neg\hat{}\varphi\hat{}), \text{ unde } \varphi \in A^*$$

$$f_{\rightarrow}: A^* \times A^* \rightarrow A^*,$$

$$f_{\rightarrow}(\varphi, \psi) = (\hat{}\varphi\hat{}\rightarrow\hat{}\psi\hat{}), \text{ unde } \varphi, \psi \in A^*.$$

Să remarcăm că în aceste definiţii operaţiile $f_{\neg}(\varphi)$ şi $f_{\rightarrow}(\varphi, \psi)$ sunt definite pe mulţimea cuvintelor, prin intermediul operaţiei de concatenare ^ definită în capitolul I.

2. Acum putem defini mulţimea **formulelor bine formate** (*fbf*), *Form*, ca fiind $G(A^*, Var, F)$, adică $Form = G(A^*, Var, F)$, unde $F = \{f_{\neg}, f_{\rightarrow}\}$. După cum am stabilit în capitolul precedent, pentru a putea defini recursiv funcţii şi aplica principiul inducţiei matematice pe mulţimea *Form*, este suficient să demonstrăm că sistemul (A^*, Var, F) are proprietatea citirii unice. Legătura dintre proprietatea citirii unice şi libera generare (care permite definirea recursivă a funcţiilor) este asigurată de teorema recursivităţii. Pentru a demonstra că (A^*, Var, F) are proprietatea citirii unice trebuie să stabilim câteva rezultate preliminare şi să precizăm definiţional conceptele implicate în aceste rezultate.

Observaţie: după cum se poate remarca, în definiţia funcţiilor $f_{\neg}$, $f_{\rightarrow}$ şi, în consecinţă, a *formulelor bine formate* am folosit anumite variabile φ, ψ care nu aparţin alfabetului sistemului considerat. Tehnic vorbind, acestea sunt metavariabile. În continuare presupunem cunoscută distincţia dintre limbaj şi metalimbaj şi, corespunzător, cea dintre variabile şi metavariabile, ca şi distincţia dintre axiome şi scheme de axiome, fără a insista asupra modului în care se supleneşte regula substituţiei prin introducerea schemelor de axiome. În acest sens, axiomele $\mathbf{Ax_1}$ – $\mathbf{Ax_3}$ de mai jos sunt, propriu-zis, scheme de axiome.

Să notăm, în continuare, numărul parantezelor stângi ale unui şir $\varphi \in A^*$cu $ps(\varphi)$ şi a celor drepte cu $pd(\varphi)$.

Lema 2.1: Pentru orice formulă $\varphi \in Form$, $ps(\varphi) = pd(\varphi)$.

Demonstraţie: Fie $X = \{\varphi / \varphi \in Form,\ ps(\varphi) = pd(\varphi)\}$. Evident, $X \subseteq Form$ (din definiţia mulţimii X rezultă că este o submulţime a mulţimii *Form*), aşadar să demonstrăm că $Form \subseteq X$. Conform *lemei 1.5* tot ceea ce trebuie să probăm în acest sens este că X este o mulţime inductivă.

i) $Var \subseteq X$ $[ps(p_n) = pd(p_n) = 0, p_n \in Var]$

ii) Să disjungem demonstraţia pasului inductiv în două subcazuri, corespunzătoare celor două funcţii care compun mulţimea F:

iia) Să presupunem că $\varphi \in X$ şi să demonstrăm că $f_{\neg}(\varphi)$.

iib) Să presupunem că $\varphi, \psi \in X$ şi să demonstrăm că $f_{\rightarrow}(\varphi, \psi) \in X$.

iia) Dacă $\varphi \in X$, atunci $ps(\varphi) = pd(\varphi) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Dar $f_\neg(\varphi)$ adaugă o paranteză dreaptă şi una stângă în plus faţă de numărul parantezelor din φ păstrând, în acest mod, egalitatea parantezelor drepte cu cele stângi, $ps(f_\neg(\varphi)) = pd(f_\neg(\varphi)) = n + 1$

iib) Dacă φ, $\psi \in X$, atunci $ps(\varphi) = pd(\varphi) = n$ şi $ps(\psi) = pd(\psi) = m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Dar $f_\rightarrow(\varphi, \psi)$ adaugă o paranteză dreaptă şi una stângă în plus faţă de numărul parantezelor din φ şi ψ, prin urmare $ps(f_\rightarrow(\varphi, \psi)) = pd(f_\rightarrow(\varphi, \psi)) = n + m + 1$.
Din *iia*) şi *iib*) rezultă că dacă φ, $\psi \in X$ atunci $f_\neg(\varphi), f_\neg(\psi), f_\rightarrow(\varphi, \psi) \in X$.
Din *i*) şi *ii*) rezultă că X este o mulţime inductivă. În aceste condiţii $G = I \subseteq X$. Dar $X \subseteq G$, prin urmare $X = G$.

Lema 2.1 ne spune, aşadar, că *Form* are proprietatea de a conţine doar elemente (formule) ce au un număr egal de paranteze drepte şi stângi.

Remarcă: pentru simplitatea argumentelor şi demonstraţiilor nu vom mai menţiona, în continuare, *lema 1.5*, mai ales unde contextul aplicării este evident.

Lema 2.2: Pentru orice formulă $\varphi \in Form$, dacă w este un segment iniţial propriu al formulei φ, atunci $ps(w) > pd(w)$.

Demonstraţie Fie $X = \{\varphi / \varphi \in Form$, cu proprietatea că pentru orice segment iniţial propriu w al formulei φ, avem $ps(w) > pd(w)\}$. Să demonstrăm că această mulţime este inductivă.
i) Pentru orice $\varphi \in Var$, φ nu are segmente iniţiale propri, prin urmare $\varphi \in X$ (în mod vacuu), de unde rezultă că $Var \subseteq X$.
ii) Fie φ, $\psi \in X$. Conform *ipotezei inducţiei*, $ps(w) > pd(w)$, unde w este un segment iniţial propriu al formulelor φ sau ψ. Asupra acestor formule putem aplica doar cele două funcţii $f_\neg$ şi $f_\rightarrow$. Să le considerăm pe rând:
I) Prin aplicarea funcţiei $f_\neg$ asupra formulei φ obţinem $(\neg\varphi)$. Segmentele iniţiale ale acestei formule sunt:
1. $($
2. $(\neg$
3. $(\neg w$, unde w este un segment iniţial propriu al formulei φ
4. $(\neg\varphi$

Cazul 1.şi 2. verifică evident inegalitatea $ps(w) > pd(w)$, în cazul 3 aplicăm *ipoteza inductivă* iar în cazul 4 aplicăm *lema 2.1* pentru a obţine aceeaşi inegalitate $ps(w) > pd(w)$.

II) Prin aplicarea funcţiei $f_{\to}$ asupra unor formule φ şi ψ obţinem formula $(\varphi\to\psi)$. Segmentele iniţiale ale acestei formule sunt:
1. (
2. (w unde w este un segment iniţial propriu al formulei φ
3. (φ
4. ($\varphi \to$
5. ($\varphi \to w$ unde w este un segment iniţial propriu al formulei ψ
6. ($\varphi \to \psi$

Cazul 1. verifică evident inegalitatea $ps(w)>pd(w)$.
Cazul 2. verifică inegalitatea $ps(w)>pd(w)$ prin aplicarea *iptezei inducţiei.*
Cazul 3. verifică inegalitatea $ps(w)>pd(w)$ prin aplicarea *lemei 2.1.*
Cazul 4. verifică inegalitatea $ps(w)>pd(w)$ prin aplicarea *lemei 2.1.*
Cazul 5. verifică inegalitatea $ps(w)>pd(w)$ prin aplicarea *ipotezei inducţiei* şi al *lemei 2.1.*
Cazul 6. verifică inegalitatea $ps(w)>pd(w)$ prin aplicarea lemei *lemei 2.1.*

Lema 2.3: Dacă w este un segment iniţial propriu al unei formule, atunci w nu este o formulă.

Demonstraţie: din *lema 2.2* rezultă că pentru orice segment propriu w al unei formule $\varphi\in Form$, avem $ps(w)>pd(w)$, prin urmare, conform *lemei 2.1* $w\notin Form$, iar în cazul formulelor $\varphi\in Var$ acestea, evident, nu au segmente proprii.

Lema 2.4: Pentru orice $\varphi\in Form$, fie $w_{\varphi}(1) = p_n$, $p_n\in Var$, fie $w_{\varphi}(1) =$ (.

Demonstraţie: fie X={φ/$\varphi\in Form$, astfel încât, fie $w_{\varphi}(1) = p_n$, $p_n\in Var$, fie $w_{\varphi}(1) =$(}
i) evident $Var\subseteq X$ (pentru orice p_n, $p_n\in Var$, $w_{p_n}(1) = p_n$).

ii) să presupunem că φ, $\psi\in Form$, şi să demonstrăm că $f_{\neg}(\varphi)$, $f_{\to}(\varphi, \psi)\in Form$. Dacă $\varphi\in Form$, atunci $f_{\neg}(\varphi) = (\neg\varphi)$, de unde rezultă că $w_{f_{\neg}(\varphi)}(1) =$ (, iar dacă φ, $\psi\in Form$, atunci $f_{\to}(\varphi, \psi) = (\varphi \to \psi)$, de unde rezultă că $w_{f_{\to}(\varphi, \psi)}(1) =$ (.
Din *i*) şi *ii*) rezultă că $Form\subseteq X$. Dar $X\subseteq Form$ (din definiţia mulţimii X rezultă că este o submulţime a mulţimii $Form$) prin urmare $X = Form$.

Teorema 2.1: (*teorema de descompunere unică*) Sistemul (A^*, Var, F) are proprietatea citirii unice.

Demonstraţie: *i*) Să demonstrăm că pentru $f_\neg$ şi $f_\to$, $f_\neg(Form) \cap Var = \emptyset$ şi $f_\to(Form) \cap Var = \emptyset$, adică pentru orice φ, $\psi \in Form$, $f_\neg(\varphi) \cap Var = \emptyset$, şi $f_\to(\varphi, \psi) \cap Var = \emptyset$,. În acest scop să observăm că $w_{f\neg(\varphi)}(1) = w_{f\to(\varphi,\psi)}(1) = (\neq p_n$, pentru orice, $p_n \in Var$, φ, $\psi \in Form$.

ii) Să demonstrăm că $f_\neg(\varphi)\upharpoonright Form$ şi $f_\to(\varphi, \psi)\upharpoonright Form$ sunt injective. Fie, în acest scop, φ, $\psi \in Form$, şi să presupunem că $f_\neg(\varphi)\upharpoonright Form = (\neg\varphi) = (\neg\psi) = f_\neg(\psi)\upharpoonright Form$. Din $(\neg\varphi) = (\neg\psi)$ rezultă că $\varphi = \psi$, aşadar (1) $f_\neg(\varphi)\upharpoonright Form$ este injectivă. Fie, φ, ψ, χ, $\sigma \in Form$, şi să presupunem că $f_\to(\varphi, \psi)\upharpoonright Form = (\varphi\to\psi) = (\chi\to\sigma) = f_\to(\chi, \sigma)\upharpoonright Form$. Din $(\varphi\to\psi) = (\chi\to\sigma)$ rezultă că $\varphi \to \psi = \chi \to \sigma$. Acum, fie $\varphi = \chi$, fie φ este un segment iniţial propriu al formulei χ, fie χ un segment iniţial propriu al formulei φ. Dar ultimele două cazuri sunt excluse de *lemei 2.3*. Prin urmare $\varphi = \chi$: Dacă $\varphi\to\psi = \chi\to\sigma$ şi $\varphi = \chi$, atunci $\to\psi = \to\sigma$, de unde rezultă în continuare că $\psi = \sigma$, adică (2) $f_\to(\varphi, \psi)\upharpoonright Form$ este injectivă. Din (1) şi (2) rezultă că $f_\neg(\varphi)\upharpoonright Form$ şi $f_\to(\varphi, \psi)\upharpoonright Form$ sunt injective

iii) Să demonstrăm că $f_\neg(Form) \cap f_\to(Form) = \emptyset$, mai precis că nu există φ, ψ, $\chi \in Form$ astfel încât $f_\neg(\varphi) = f_\to(\psi\ \chi)$. Fie φ, ψ, $\chi \in Form$ şi să presupunem că $f_\neg(\varphi) = f_\to(\psi, \chi)$, adică $(\neg\varphi) = (\psi\to\chi)$. Din ultima egalitate deducem că $\neg\varphi = \psi\to\chi$, de unde, mai departe, putem infera că $w_\psi(1) = \neg$. Dar, pentru că $\psi \in Form$, rezultă, conform *lemei 2.4*, că fie $w_\psi(1) = p_n$, $p_n \in Var$, fie $w_\psi(1) =$ (, ceea ce contrazice rezultatul $w_\psi(1) = \neg$ obţinut din presupunerea că $(\neg\varphi) = (\psi\to\chi)$, de unde deducem că $(\neg\varphi) \neq (\psi\to\chi)$, şi, mai departe, că $f_\neg(Form) \cap f_\to(Form) = \emptyset$.

Din *i*), *ii*) şi *iii*) rezultă că sistemul (A^*, Var, F) are proprietatea citirii unice. Conform *teoremei recursivităţii* putem defini recursiv funcţii pe mulţimea formulelor sistemului *Form*.

Corolar 2.1: orice formulă $\varphi \in Form$ are una şi numai una dintre următoarele forme:

i) $\varphi = p_i$, $p_i \in Var$
ii) $\varphi = (\neg\psi)$, $\psi \in Form$
iii) $\varphi = (\psi\to\chi)$, ψ, $\chi \in Form$

Demonstraţie: decurge din *teorema 2.1* plus faptul că variabilele nu sunt imaginea nici unei funcţii $f_\neg(\varphi)$ sau $f_\to(\varphi, \psi)$, iar codomeniile funcţiilor $f_\neg(\varphi)$ şi $f_\to(\varphi, \psi)$ sunt disjuncte, aşadar, fiecare formulă φ este unic determinată de cele trei condiţii.

Rezultatele de mai sus ne permit, în consecinţă, să folosim instrumentele recursivităţii pentru a defini funcţii, şi inducţiei pentru a demonstra proprietăţi ale formulelor. În acest sens, să definim câteva noţiuni implicate în demonstraţiile pe care le vom prezenta în continuare[11].

Definiţie 2.1: (*complexitatea unei formule* $c(\varphi)$) Fie $\varphi \in Form$. Definim $c(\varphi)$: $Form \rightarrow \mathbb{N}$:

i) Dacă $\varphi = p_i$, $p_i \in Var$, atunci $c(p_i) = 0$.
ii) Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, atunci $c(\varphi) = c(\psi) + 1$.
iii) Dacă $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, atunci $c(\varphi) = max(c(\psi), c(\chi)) + 1$, unde $max(c(\psi), c(\chi))$ este cea mai mare valoarea dintre $c(\psi)$ şi $c(\chi)$.

Definiţie 2.2: (*variabile propoziţionale* $vp(\varphi)$) Fie $\varphi \in$ Form. Definim $vp(\varphi)$: Form $\rightarrow \mathbb{P}\{A\}$:

i) Dacă $\varphi = p_i$, $p_i \in Var$, atunci $vp(\varphi) = \{p_i\}$.
ii) Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, atunci $vp(\varphi) = vp\{\psi\}$.
iii) Dacă $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, atunci $vp(\varphi) = vp\{\psi\} \cup vp\{\chi\}$.

Fie $\varphi \in Form$ şi $vp(\varphi) = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Notăm, în continuare, acest fapt prin: $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$

Definiţie 2.3: (*subformulă imediată SFI*): Fie $\varphi \in Form$. Definim $SFI(\varphi)$: $Form \rightarrow \mathbb{P}\{Form\}$:

i) Dacă $\varphi = p_i$, $p_i \in Var$, atunci $SFI(\varphi) = \emptyset$.
ii) Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, atunci $SFI(\varphi) = \{\psi\}$.
iii) Dacă $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ atunci $SFI(\varphi) = \{\psi, \chi\}$.

Definiţie 2.4: (*subformulă*, $SF(\varphi)$): Fie $\varphi \in Form$. Definim $SF(\varphi)$: $Form \rightarrow \mathbb{P}\{Form\}$:

i) Dacă $\varphi = p_i$, $p_i \in Var$, atunci $SF(\varphi) = \{p_i\}$.
ii) Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, atunci $SF(\varphi) = \{(\neg\psi)\} \cup SF(\psi)$.
iii) Dacă $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ atunci $SF(\varphi) = \{(\psi\rightarrow\chi)\} \cup SF(\psi) \cup SF(\chi)$.

---

[11] După cum am insistat pe parcursul capitolului anterior şi demonstrat în acest capitol, teorema de descompunere unică cuplată cu teorema de recursivitate legitimează folosirea definiţiilor recursive.

În continuare, vom defini o operaţie sintactică – *substituţia* – care reprezintă, printre altele, unul dintre instrumentele principale de generare a tautologiilor, pe care o vom generaliza pentru cazul logicii de ordinul I şi a cărei importanţă în dezvoltarea calculului propoziţional şi a logicii de ordinul I nu poate fi uşor subestimată. Intuitiv, operaţia de substituţie presupune înlocuirea *simultană* cu o formulă[12] oarecare a calculului propoziţional, a tuturor ocurenţelor unei variabile dintr-o formulă.

Fie $\varphi \in Form$,

$$\varphi = (((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow (\neg p_2))) \rightarrow (\neg p_1))$$

Evident, $\varphi(p_1, p_2)$, pentru că $vp(\varphi) = \{p_1, p_2\}$. Să substituim una sau mai multe variabile ale unei formule $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ cu alte formule $\varphi_1, ..., \varphi_n$[13]. Notăm rezultatul substituţiei prin $\varphi(\varphi_1/p_1,..., \varphi_n/p_n)$. Fie, pentru a continua exemplul nostru,

$$\varphi_1 = (\neg p_1) \text{ şi}$$

$$\varphi_2 = (p_1 \rightarrow p_2).$$

Rezultatul substituţiei $\varphi(\varphi_1/p_1, \varphi_2/p_2)$ este:

$$\varphi(\varphi_1/p_1, \varphi_2/p_2) = ((((\neg p_1) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((\neg p_1) \rightarrow (\neg(p_1 \rightarrow p_2)))) \rightarrow (\neg(\neg p_1)))$$

Este rezultatul unei astfel de substituţii o formulă propoziţională? Pentru a demonstra că este avem nevoie de o definiţie riguroasă a substituţiei variabilelor propoziţionale. Iată această definiţie:

Definiţie 2.5: (*substituţia*) Pentru orice $\varphi(p_1, ..., p_n)$, $\varphi_1, ..., \varphi_n \in Form$, $p_1..., p_n \in Var$:

1. Dacă $\varphi = p_i$, atunci $\begin{cases} \varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n) = \varphi_i, \text{dacă } i = \overline{1,n} \\ \varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n) = p_i, \text{dacă } i \neq \overline{1,n} \end{cases}$.

2. Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, atunci $\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n) = (\neg(\psi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)))$.

3. Dacă $\varphi = (\psi\rightarrow\chi)$, atunci $\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n) = (\psi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)\rightarrow\chi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n))$.

Cu ajutorul definiţiei de mai sus putem demonstra că:

Lema 2.5: Rezultatul unei substituţii este o formulă a calculului propoziţiilor.

Demonstraţie: prin inducţie pe mulţimea formulelor.

[12] Formula substituentă poate fi chiar variabila propoziţională substituită.

[13] Nu e necesar ca aceste formule să fie distincte şi, aşa cum menţionam în nota precedentă, pot fi formate din variabile propoziţionale, identice cu cele substituite.

3. Axiomele (Ax):

Axiomele calculului propoziţional sunt toate formulele, $\sigma \in Form$, obţinute ca instanţe substituţionale ale următoarele scheme de axiome:

Ax₁: $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$

Ax₂: $(((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)))$

Ax₃: $(((\neg\varphi) \to (\neg\psi)) \to (\psi \to \varphi))$

Exemplu: $((p_1 \to p_3) \to (p_2 \to (p_1 \to p_3)))$ este o axiomă obţinută din schema $\mathbf{Ax_1}$ prin substituţiile: $(p_1 \to p_3)/\varphi$, p_2/ψ.

4. Reguli de derivare ($\mathbf{R_d}$):

Modus ponens (*mp*): Dacă φ, $\psi \in Form$, atunci din φ şi $(\varphi \to \psi)$ putem infera ψ.

Unul dintre motivele construirii unui sistem formal este definirea precisă a ce anume constituie o demonstraţie.

Definiţie 2.6: (*demonstraţie*) O demonstraţie a unei formule $\varphi \in Form$ în sistemul axiomatic considerat este un şir finit de formule $\varphi_1 - \varphi_n$ astfel încât $\varphi = \varphi_n$ şi pentru orice $k \le n$,

i) φ_k este o instanţă a unei scheme de axiome din **Ax** (φ_k este o axiomă) sau
ii) φ_k rezultă, prin aplicarea regulii *modus ponens*, din formulele φ_i, φ_j unde i, $j < k$ φ_i, φ_j

Secvenţa $\varphi_1 - \varphi_n$ se numeşte *demonstraţia* formulei φ iar formula φ este o *teoremă*, formal, $\vdash \varphi$, dacă există o demonstraţie a acesteia în sistemul axiomatic considerat. Pentru discuţia ulterioară este convenabil să introducem noţiunea de demonstraţie din asumpţii, sau din ipoteze. Vom înţelege prin *deducţie* o astfel de demonstraţie din asumpţii sau ipoteze. Fie Σ o mulţime de formule ale calculului considerat.

Definiţie 2.7: (*deducţie*) Numim *deducţie* a unei formule φ din asumpţiile sau ipotezele Σ un şir finit de formule $<\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n>$ astfel încât $\varphi = \varphi_n$ şi pentru orice $k \le n$,

i) $\varphi_k \in \mathbf{Ax}$ (φ_k este o axiomă)
ii) $\varphi_k \in \Sigma$ (φ_k este una din formulele din Σ)
iii) φ_k rezultă prin aplicarea regulii modus ponens din φ_i, φ_j unde $i, j < k$.

Şirul $<\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n>$ se numeşte *deducţia* formulei φ din asumpţiile sau ipotezele Σ. Simbolic: $\Sigma \vdash \varphi$.

În acest context, putem reprezenta formal regula de deducţie *modus ponens* în următorul mod: $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \vdash \psi$

În continuare enumerăm fără a oferi toate demonstraţiile – dar cu invitaţia ca cititorul să încerce să demonstreze, ca exerciţiu al înţelegerii definiţiilor de mai sus – câteva rezultate necesare în demonstraţia de tip Kalmár a completitudinii calculului propoziţional, mai precis câteva scheme de teoreme ale sistemului axiomatic, unele proprietăţi ale relaţiei de deductibilitate $\vdash$ precum şi o teoremă ce stabileşte corespondenţa dintre implicaţie $\to$ şi relaţia de deductibilitate $\vdash$.

Scheme de teoreme ale C_p:

$\mathbf{T_1}$ $\vdash (\varphi \to \varphi)$
$\mathbf{T_2}$ $\vdash (\varphi \to (\neg(\neg\varphi)))$
$\mathbf{T_3}$ $\vdash ((\neg\varphi) \to (\varphi \to \psi))$
$\mathbf{T_4}$ $\vdash (\psi \to (\varphi \to \psi))$
$\mathbf{T_5}$ $\vdash (\varphi \to ((\neg\psi) \to (\neg(\varphi \to \psi))))$
$\mathbf{T_6}$ $\vdash ((\varphi \to \psi) \to (((\neg\varphi) \to \psi) \to \psi)$
$\mathbf{T_7}$ $\vdash ((((\neg\varphi) \to \psi)\to ((\neg\varphi) \to (\neg\psi))) \to \varphi)$
$\mathbf{T_8}$ $\vdash (((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\neg\psi))) \to (\neg\varphi))$
$\mathbf{T_9}$ $\vdash (\neg(\varphi \to \psi) \to \varphi)$
$\mathbf{T_{10}}$ $\vdash (\neg(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi))$
$\mathbf{T_{11}}$ $\vdash ((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi))) \to (\varphi \to \chi))$

Ca mostră de (meta)demonstraţie[14] oferim mai jos una dintre demonstraţiile schemei teoremei $\mathbf{T_1}$:

1. $\vdash (((\varphi\to ((\psi \to \varphi)\to\varphi)) \to ((\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)))$ [$\mathbf{Ax_2}(\psi \to \varphi)/\psi, \varphi/\chi$[15]]
2. $\vdash (\varphi \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi))$ [$\mathbf{Ax_1}$, $(\psi \to \varphi)/\psi$]
3. $\vdash ((\varphi \to (\psi \to \varphi))\to(\varphi \to \varphi))$ [1, 2, *mp*]
4. $\vdash (\varphi \to (\psi \to \varphi))$ [$\mathbf{Ax_1}$]
5. $\vdash (\varphi \to \varphi)$ [3, 4, *mp*]

---

[14] Spunem (meta)demonstraţie pentru că demonstraţia care urmează nu reprezintă o demonstraţie în sensul definiţiei 2.6, ci este, mai degrabă, o reţetă metademonstrativă a schemei de teoremă $(\varphi \to \varphi)$.

[15] Evident, substituţia, în acest caz, nu este definită, şi comitem un abuz de folosire a substituţiei, dar este un abuz menit să clarifice provenienţa formulei $(\psi \to (\varphi \to \psi))$ şi să acomodeze cititorul cu practica substituţiei.

Proprietăţi ale relaţiei de deductibilitate $\vdash$:

1. $\{\varphi\} \vdash \varphi$ (‘regula asumpţiei’[16]– AS.)
2. Dacă $\Sigma \vdash \varphi$ şi $\{\varphi\} \vdash \psi$ atunci $\Sigma \vdash \psi$ (‘regula tăieturii’ – CUT)
3. Dacă $\Sigma \vdash \varphi$ atunci $\Sigma \cup \Delta \vdash \varphi$ (‘regula atenuării’ –THIN), unde $\Delta \subseteq$ *Form*.

Proprietatea 1., de pildă, decurge din clauza ii) a definiţiei relaţiei de deductibilitate.

Teorema 2.2: *Teorema deducţiei*: $\Sigma, \{\varphi\} \vdash \psi$ ddacă $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$.

Demonstraţie

Suficienţa [prin inducţie pe lungimea l_d = <$\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$> = n a deducţiei formulelor] Să presupunem că $\Sigma, \{\varphi\} \vdash \psi$ şi să demonstrăm că $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$.

Cazul de bază $l_d = 1$. În acest caz, formula de dedus $\varphi_n = \psi$ se încadrează într-una dintre cele trei condiţii de mai jos, specificate de definiţia deductibilităţii:

1) $\psi \in$ **Ax** (ψ este o axiomă)
2) $\psi \in \Sigma$ (ψ este una din formulele din Σ)
3) $\psi = \varphi$

În situaţia 1), formula ψ poate fi derivată din orice mulţime Σ. În particular,

$$(1)\ \Sigma \vdash \psi$$
$$(2)\ \Sigma \vdash (\psi \to (\varphi \to \psi))\ [\mathbf{Ax_1}(\psi/\varphi, \varphi/\psi)]$$
$$(3)\ \Sigma \vdash (\varphi \to \psi)\ [(1), (2), \mathit{mp}]$$

În situaţia 2), avem

$$(4)\ \Sigma \vdash \psi\ [\text{AS}]$$
$$(5)\ \Sigma \vdash (\psi \to (\varphi \to \psi))\ [\mathbf{Ax_1}(\psi/\varphi, \varphi/\psi)]$$
$$(6)\ \Sigma \vdash (\varphi \to \psi)\ [(4), (5), \mathit{mp}]$$

În situaţia 3), avem

$$(7)\ \Sigma \vdash (\varphi \to \varphi)\ [\text{vezi demonstraţia de mai sus a } \mathbf{T_1}]$$

Pasul inductiv

Să presupunem că pentru orice deducţii cu $l_d < n$ are loc:

$$\text{(IH) Dacă } \Sigma, \{\varphi\} \vdash \psi, \text{ atunci } \Sigma \vdash (\varphi \to \psi).$$

Acum, $l_d = n$ poate fi obţinută doar prin aplicarea uneia dintre cele 3 condiţii ale definiţiei deducţiei i), ii) sau iii) sau a cazului când $\varphi = \psi$. Primele două condiţii şi

[16] Deşi aceste proprietăţi sunt, de fapt, metateoreme ale *Cp*, am decis să preluăm denumirea lor din calculul secvenţilor, unde apar ca reguli structurale.

cazul $\varphi = \psi$ sunt acoperite de demonstraţiile situaţiilor 1), 2) şi 3) ale cazului de bază. Singura modalitate de obţinere a deducţiei formulei ψ rămâne, în consecinţă, prin aplicarea regulii *modus ponens*. Să considerăm, aşadar, că $\psi = \varphi_n$ a rezultat prin aplicarea regulii *modus ponens* din φ_i, $\varphi_j = (\varphi_i \to \varphi_n)$ unde $i, j < n$. În această situaţie,

$$(9)\ \Sigma \vdash (\varphi \to \varphi_i)\ [(\mathrm{IH})]$$

şi

$$(10)\ \Sigma \vdash (\varphi \to (\varphi_i \to \varphi_n))\ [(\mathrm{IH})]$$

Dar

$$(11)\ \Sigma \vdash ((\varphi \to \varphi_i) \to ((\varphi \to (\varphi_i \to \varphi_n))) \to (\varphi \to \varphi_n))\ [\mathrm{T}_{11}(\psi/\varphi_i, \chi/\varphi_n) \text{ şi THIN}]$$

$$(12)\ \Sigma \vdash ((\varphi \to (\varphi_i \to \varphi_n)) \to (\varphi \to \varphi_n))\ [(9), (11), mp]$$

$$(13)\ \Sigma \vdash (\varphi \to \varphi_n)\ [(9), (12), mp]$$

Cum $\psi = \varphi_n$ rezultă că $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$ şi cu aceasta suficienţa teoremei este demonstrată.

Necesitatea: să presupunem că (1) $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$ şi să demonstrăm că $\Sigma, \{\varphi\} \vdash \psi$.

(1) $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$ [presupunere]

(2) $\Sigma, \{\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi)$ [(1) şi THIN]

(3) $\Sigma, \{\varphi\} \vdash \varphi$ [AS]

(4) $\Sigma, \{\varphi\} \vdash \psi$ [(2), (3), *mp*]

Observaţie: Să notăm că *teorema deducţiei* are un carcater constructiv, în sensul în care oferă reţete de construcţie, în sistemul axiomatic descris, a demonstraţiilor implicate în suficienţa şi necesitatea teoremei: pornind de la $\Sigma, \{\varphi\} \vdash \psi$, demonstraţia suficienţei teoremei ne arată cum anume să construim demonstraţia[17] formulei $(\varphi \to \psi)$ din asumpţiile Σ, respectiv, pornind de la $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$, necesitatea teoremei ne arată cum să construim demonstraţia formulei ψ din asumpţiile $\Sigma, \{\varphi\}$.

În continuare, vom simplifica notaţia de tipul $\{\varphi\} \vdash \psi$ prin omiterea acoladelor. De asemenea, să remarcăm că în sistemul axiomatic descris mai sus putem recupera recupera operatorii logici corespunzători conjuncţiei, disjuncţiei şi echivalenţei prin intermediul următoarelor definiţii:

Conjuncţia [$\wedge$]: $(\varphi \wedge \psi) =_{\mathrm{df}} \neg(\varphi \to \neg\psi)$. *Disjuncţia* [$\vee$]: $(\varphi \vee \psi) =_{\mathrm{df}} ((\neg\varphi) \to \psi)$.

Echivalenţa: [$\equiv$]: $(\varphi \equiv \psi) =_{\mathrm{df}} \neg((\varphi \to \psi) \to \neg(\psi \to \varphi))$.

---

[17] În sistemul axiomatic descris, desigur.

ASPECTE SEMANTICE ALE CALCULULUI PROPOZIȚIONAL

Strategia prin care vom dezvolta latura semantică a unui sistem formal constă în identificarea unei modalităţi de a atribui sistematic semnificaţii componentelor sintactice. Desigur, această atribuire trebuie să respecte construcţia sintactică a formulelor şi să atribuie într-un mod consistent semnificaţii. În continuare, vom prezenta modalitatea devenită între timp canonică în logica matematică de a atribui sistematic semnificaţii componentelor sintactice – ceea ce revine, de fapt, la a construi o interpretare a limbajului sistemului formal. Ideea de bază a acestei modalităţi este de a trata limbajele formale drept algebre sau sisteme de generare şi, în consecinţă, de a concepe interpretarea unui limbaj ca un homomorfism de la alegebra/sistemul de generare considerat la un model adecvat ales. Riscul pe care orice astfel de interpretare îl comportă este acela al inconsistenţei atriburilor iar un caz paradigmatic al acestui tip de risc a constituit obiectul *teoremei 1.17* din capitolul anterior. Dacă, însă, sistemul este liber generat, atunci, aşa cum am văzut, putem defini recursiv funcţii, ceea ce înseamnă că nu riscăm să atribuim semnificaţii inconsistente, iar *teorema 2.1* şi *teorema recursivităţii* ne asigură că sistemul axiomatic al calcului propoziţiilor prezentat mai sus este liber generat. În acest punct al discuţiei putem surprinde mai bine relevanţa demersului din capitolul anterior. Interpretarea limbajului calculului propoziţiilor se va realiza, aşadar, prin construcţia unui homomorfism. Iar procedura de construcţie a acestui homomorfism presupune, într-un prim pas, atribuirea de semnificaţii componentelor atomare ale sintaxei, iar într-un al doilea pas, transformarea sistematică a acestor semnificaţii într-un mod care să oglindească aplicaţiile funcţiilor sintactice asupra formulelor. Această procedură se poate implementa elegant prin intermediul funcţiilor de evaluare şi al extensiei acestora.

Definiţie 2.8: (*evaluare*) Se numeşte *evaluare* orice funcţie v: $Var \rightarrow \{0, 1\}$, care atribuie o valoare de adevăr determinată (în cazul de faţă fie falsul – 0, fie adevărul – 1) variabilelor propoziţionale.

Mulţimea tuturor evaluărilor este $2^{\overline{Var}} = 2^{\aleph_0} = c$, unde $\overline{Var}$ este cardinalul mulţimii variabilelor propoziţionale.

Definiţie 2.9: (*interpretare*): Fie v o funcţie de evaluare. Se numeşte *interpretare* şi se notează cu i, i: *Form* $\rightarrow \{0, 1\}$, extensia homomorfică a funcţiei de evaluare v specificată prin următoarele clauze:

1. Dacă $\varphi = p_i$, atunci $i(\varphi) = i(p_i) = v(p_i)$, $p_i \in Var$.

2. Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, atunci $i(\varphi) = i(\neg\psi) = \begin{cases} 0, \text{dacă } i(\psi) = 1 \\ 1, \text{altfel} \end{cases}$.

3. Dacă $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, atunci $i(\varphi) = i(\psi \rightarrow \chi) = \begin{cases} 0, \text{dacă } i(\psi) = 1,\ i(\chi\chi = 0 \\ 1, \text{altfel} \end{cases}$.

unde $\varphi, \psi, \chi \in Form$.

Definiţie 2.10: (*model*): Se numeşte *model* al formulei $\varphi \in Form$ orice evaluare v care se extinde la o interpretare i astfel încât $i(\varphi) = 1$. Se numeşte *model al unei mulţimi de formule* $\Gamma \subset Form$, orice evaluare v care se extinde la o interpretare i astfel încât $i(\varphi) = 1$, pentru orice $\varphi \in \Gamma$, prescurtat $i(\Gamma) = 1$.

Definiţie 2.11: (*satisfiabilitate*) O formulă $\varphi \in Form$ este *satisfiabilă* dacă există un model al formulei φ. O mulţime de formule $\Gamma \subset Form$ este *satisfiabilă* dacă există un model al lui Γ.

Discuţia de până acum şi precizările definiţionale de mai sus nu infirmă ideea că pentru a testa dacă o formulă $\varphi \in Form$ este satisfiabilă, trebuie să verificăm cele $2^{\aleph_0}$ posibile evaluări, cu scopul de a determina o interpretare i în care $i(\varphi) = 1$. Un moment de reflecţie, însă, ne arată că nu toate cele $2^{\aleph_0}$ interpretări sunt relevante ci doar cele în care variază valoarea semantică a variabilelor propoziţionale ale formulei φ. De pildă, pentru a determina dacă formula $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ este satisfiabilă sunt irelevante acele evaluări v în care valoarea semantică $v(p_i)$, $i = \overline{1,n}$, a variabilelor rămâne neschimbată. Pentru a demonstra suficienţa restricţiei evaluărilor relevante pentru satisfiabilitatea unei formule $\varphi(p_1, \ldots, p_n) \in Form$ la cazul variabilelor propoziţionale $\{p_1, \ldots, p_n\}$ ale formulei φ vom proceda în următorul mod: vom demonstra că orice două evaluări care diferă în atribuirea de valori acelor variabile care sunt diferite de variabilele propoziţionale ale formulei φ, dar care păstrează valorile tuturor variabilelor propoziţionale ale lui φ, se extind la două interpetări care atribuie aceeaşi valoare semantică formulei φ.

Lema 2.6: (*Lema coincidenţei evaluărilor*): Fie $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$, $\varphi \in Form$, v_1: $Var \rightarrow \{0, 1\}$ şi v_2: $Var \rightarrow \{0, 1\}$ astfel încât $v_1(p_i) = v_2(p_i)$, pentru orice $i = \overline{1,n}$ şi $v_1(p_k) \neq v_2(p_k)$, pentru orice $k \neq \overline{1,n}$. În aceste condiţii, $i_1(\varphi) = i_2(\varphi)$.

Demonstraţie: [prin inducţie pe *Form*]
Cazul de bază: $\varphi = p_i$, $p_i \in Var$.
$i_1(\varphi) = i_1(p_i)$
$= v_1(p_i)$ [definiţia lui *i*]
$= v_2(p_i)$ [ipoteza teoremei]
$= i_2(\varphi)$ [definiţia lui *i*]
Pasul inductiv: să presupunem că ψ, $\chi \in Form$ au proprietatea că $i_1(\psi) = i_2(\psi)$, $i_1(\chi) = i_2(\chi)$ şi să demonstrăm că $(\psi \rightarrow \chi)$, $(\neg\psi)$ au aceeaşi proprietate, adică $i_1(\neg\psi) = i_2(\neg\psi)$, respectiv $i_1(\psi \rightarrow \chi) = i_2(\psi \rightarrow \chi)$
Cazul I. $\varphi = (\neg\psi)$.
$i_1(\varphi) = i_1(\neg\psi)$

$$= \begin{cases} 0, \text{dacă } i_1(\psi) = 1 \\ 1, \text{altfel} \end{cases} \text{[definiţia lui } i\text{]}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{dacă } i_2(\psi) = 1 \\ 1, \text{altfel} \end{cases} \text{[ipoteza inductivă]}$$

$= i_2(\neg\psi) = i_2(\varphi)$ [definiţia lui *i*]
Cazul II. $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$
$i_1(\varphi) = i_1(\psi \rightarrow \chi)$

$$= \begin{cases} 0, \text{dacă } i_1(\psi) = 1,\ i_1(\chi\chi = 0 \\ 1, \text{altfel} \end{cases} \text{[definiţia lui } i\text{]}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{dacă } i_2(\psi) = 1,\ i_2(\chi\chi = 0 \\ 1, \text{altfel} \end{cases} \text{[ipoteza inductivă]}$$

$= i_2(\psi \rightarrow \chi) = i_2(\varphi)$ [definiţia lui *i*].

După cum subliniam mai sus, *lema coincidenţei evaluărilor* are un efect cât se poate de practic: restrânge verficarea satisfiabilităţii unei formule $\varphi \in Form$ de la toate evaluările posibile ale variabilelor la toate evaluările posibile ale variabilelor propoziţionale $vp(\varphi)$ ale formulei φ. Numărul evaluărilor posibile – pe care îl vom nota în continuare cu $\#v(\varphi)$ – ale variabilelor propoziţionale ale unei formule

$\varphi \in Form$ este uşor de determinat, confom egalităţii[18]: $\#v(\varphi) = 2^{\overline{vp(\varphi)}}$, unde $\overline{vp(\varphi)}$ este cardinalul mulţimii $vp(\varphi)$. Pentru că orice formulă este un şir finit de simboluri ale alfabetului ales, formula va conţine un număr finit de atomi. În consecinţă, verificarea satisfiabilităţii unei formule $\varphi \in Form$, $vp(\varphi) = \{p_1, ..., p_n\}$, se poate efectua mecanic, aplicând clauzele recursive ale interpretării i la toate evaluările posibile ale variabilelor propoziţionale ale formulei φ, evaluări în număr de $\#v(\varphi) = 2^{\overline{vp(\varphi)}} = 2^n$. În practică, reprezentarea celor 2^n evaluări posibile ale $vp(\varphi)$ şi identificarea evaluărilor în care formula φ este satisfiabilă se face prin intermediul *tabelelor de adevăr*. Mai jos oferim un exemplu de determinare a satisfiabilităţii unei formule prin metoda tabelelor de adevăr.

Exemplu: Fie formula $\varphi = (\neg((\neg(((\neg p_1) \to p_2) \to p_3)) \to ((p_2 \to p_3) \to (p_1 \to p_3))))$, unde $vp(\varphi) = \{p_1, p_2, p_3\}$, aşadar avem $\varphi(p_1, p_2, p_3)$. În conformitate cu *lema coincidenţei evaluărilor*, pentru a determina dacă formula $\varphi(p_1, p_2, p_3)$ este satisfiabilă este suficient să restrângem verificarea satisfiablilităţii la evaluările posibile ale $vp(\varphi)$, unde numărul evaluărilor posibile se calculează cu formula de ma sus, $\#v(\varphi) = 2^{\overline{vp(\varphi)}} = 2^3 = 8$. Cele 8 evaluări posibile (ale $vp(\varphi)$) sunt reprezentate sub forma celor 8 linii din primele trei coloane ale tabelului[19]:

p_1	p_2	p_3	$\neg p_1$	$((\neg p_1) \to p_2)$	$(((\neg p_1) \to p_2) \to p_3)$	$\neg(((\neg p_1) \to p_2) \to p_3) = A$	$(p_2 \to p_3)$	$(p_1 \to p_3)$	$(p_2 \to p_3) \to (p_1 \to p_3) = B$	$A \to B$	φ
0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0

După cum se poate observa din tabelul de mai sus există doar o singură evaluare v în care formula $\varphi = (\neg((\neg(((\neg p_1) \to p_2) \to p_3)) \to ((p_2 \to p_3) \to (p_1 \to p_3))))$ este

[18] Nu vom oferi aici demonstraţia egalităţii, dar precizăm că se poate proba prin inducţie matematică iar cititorul interesat poate şi este încurajat să construiască singur o demonstraţie.

[19] Pentru a dimensiona tabelul la o scală ce permite reprezentarea în pagină am omis unele paranteze din formula φ.

satisfiabilă, cea în care $v(p_1) = 1$, $v(p_2) = 0$ şi $v(p_3) = 0$, ceea ce revine la a spune că formula φ are doar un model. Procesul de verficare a satisfiabilităţii unei formule oarecare, adică a existenţei unui model al formulei în cauză are o relevanţă deosebită în informatică şi ştiinţele computaţionale, unde este cunoscut sub denumirea de *model checking*. Deşi este banal în calculul propoziţiilor, în logica de ordinul I şi în extensiile modale ale acesteia procedeul de *model checking* este mult mai complex şi reprezintă o temă importantă de cercetare.

Definiţie 2.12: (*tautologie*) O formulă $\varphi \in Form$ este o *tautologie*, simbolic $\models \varphi$ ddacă orice evaluare v este un model al formulei φ.

Definiţie 2.13: (*contradicţie/inconsistenţă semantică*) O formulă $\varphi \in Form$ este *contradictorie* sau *inconsistentă* ddacă nici o evaluare v nu este un model al formulei φ. O mulţime de formule $\Gamma \subset Form$ este *contradictorie semantic* sau *inconsistentă semantic* ddacă nu există nici o evaluare v astfel încât $i(\Gamma) = 1$, adică, dacă mulţimea Γ nu are nici un model.

Definiţie 2.14: (*consecinţă tautologică*): O formulă $\varphi \in Form$ este *consecinţa tautologică* unei mulţimi de formule $\Gamma \subset Form$, simbolic $\Gamma \models \varphi$, ddacă nu există nici o evaluare v astfel încât $i(\Gamma) = 1$ şi $i(\varphi) = 0$, adică ddacă orice model al lui Γ este şi un model al formulei φ.

Determinarea caracterului tautologic respectiv contradictoriu al unei formule arbitrare $\varphi \in Form$ cât şi a faptului că o formulă $\varphi \in Form$ este consecinţa tautologică a unei mulţimi $\Gamma \subset Form$ se poate realiza, de asemenea, prin metoda tabelelor de adevăr.

Faptul că $\varphi \in Form$ nu este *consecinţa tautologică* a unei mulţimi de formule $\Gamma \subset Form$ se notează prin $\Gamma \not\models \varphi$[20], ceea ce înseamnă, evident, că nu orice model al mulţimii Γ este şi un model al formulei φ.

În continuare, vom subînţelege prin referinţa la o evaluare oarecare v şi interpretarea i care extinde în mod unic evaluarea v că acestea sunt definite adecvat, v: $Var \rightarrow \{0, 1\}$ şi i: $Form \rightarrow \{0, 1\}$. De asemenea, acolo unde demonstraţiile sunt laborioase şi necesită mai multă concentrare asupra surprinderii tiparului care organizează mişcarea demonstraţiei vom comite un abuz de limbaj şi

[20] Surprinzătoare notaţia, nu-i aşa?

vom vorbi despre existenţa unui model al unei formule arbitrare $\varphi \in Form$ sau al unei mulţimi $\Gamma \subset Form$ în termenii existenţei unei interpretări $i(\varphi) = 1$ sau $i(\Gamma) = 1$ deşi vom înţelege că este vorba, de fapt, de existenţa unei evaluări v care se extinde la o interpretare i care are proprietăţile respective.

În acest punct al lucrării avem stabilite toate noţiunile pentru a construi latura semantică a operaţiei de substituţie. În acest sens, vom începe prin definirea evaluării unei formule atomare în care am substituit valoarea unei variabile propoziţionale cu valuarea unei formule, apoi vom extinde această evaluare la o interpretare pe mulţimea tuturor formulelor, în maniera în care am procedat şi la definirea evaluărilor şi intepretărilor formulelor sistemului nostru.

Definiţie 2.15: (*evaluarea unei formule substituite*) Fie v o evaluare a variabilelor $p_1, ..., p_n$ şi $\varphi \in Form$ o formulă atomară, $\varphi = p_i$. În aceste condiţii, definim o evaluare $v_s[\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)]$ ca fiind valoarea pe care o obţinem prin substituţia $v(p_i)$ cu $i(\varphi_i)$, unde i este interpretarea care extinde evaluarea v. Formal,

$$v_s[\varphi(\varphi_1/p_1 ..., \varphi_n/p_n)] = \begin{cases} i(\varphi_i), \text{dacă } \varphi = p_i,\ i = \overline{1,n} \\ v(p_i), \text{dacă } \varphi = p_k,\ k \neq \overline{1,n} \end{cases}.$$

Această funcţie de evaluare v_s se extinde la o interpretare i_s peste mulţimea tuturor formulelor, aşa cum ne-am aştepta, adică similar modului în care o interpretare i oarecare se extinde:

Definiţie 2.16: (*interpretarea unei formule substituite*) Fie $v_s[\varphi(\varphi_1/p_1 ..., \varphi_n/p_n)]$ evaluarea unei formule atomare rezultate prin substituţia $\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)$. Definim extensia $i_s[\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)]$: $Form \rightarrow \{0, 1\}$ prin următoarele clauze:

1. Dacă $\varphi = p_i$, atunci $i_s[\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)] = v_s[\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)]$, $p_i \in Var$.

2. Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, atunci $i_s[\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)] = \begin{cases} 0, \text{dacă } i_s[\psi\psi\varphi_1/p_1 ... \varphi_n/p_n)] = 1 \\ 1, \text{altfel} \end{cases}.$

3. Dacă $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, atunci

$$i_s[\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)] = \begin{cases} 0, \text{dacă } i_s[\psi\psi\varphi_1/p_1 ... \varphi_\text{n}/p_n)] = 1 \text{ şi } i_s[\chi(\varphi_1/p_1 ... \varphi_\text{n}/p_n)] = 0 \\ 1, \text{altfel} \end{cases},$$

unde, evident $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n \in Form$.

Fie, acum, o evaluare v şi extensia corespunzătoare i. O bună întrebare este dacă valoarea semantică pe care extensia $i_s[\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)]$ o atribuie formulei

$\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)$ este unică şi coincide cu valoarea pe care extensia i o atribuie rezultatului substituţiei. Răspunsul este afirmativ şi este probat de lema de mai jos, care, în esenţă, ne spune că interpretarea $i(\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n))$ a formulei $\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)$ ce rezultă după efectuarea operaţiei de substituţie este aceeaşi cu interpretarea $i_s[\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)]$ a formulei de substituit dar în care în care valorilor variabilelor de substituit $i(p_1)$, ..., $i(p_n)$ sunt înlocuite cu valorile formulelor substituante $i(\varphi_1)$, ..., $i(\varphi_n)$.

Lema 2.7: Fie φ, ψ, χ , φ_1, ..., $\varphi_n \in Form$, $p_1..., p_n \in Var$. În aceste condiţii, $i(\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)) = i_s[\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)]$.

Demonstraţie: [prin inducţie pe complexitatea formulei φ]

Cazul de bază: $c(\varphi) = 0$. Prin urmare, $\varphi \in Var$. Să presupunem, fără a pierde din generalitatea argumentului, că $\varphi = p_i$.

I. Dacă $i = \overline{1,n}$, atunci:

$i[\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)] = i(\varphi_i)$ [definiţia *substituţiei*]

$= v_s[\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)]$ [definiţia evaluării v_s]

$= i_s[\varphi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)]$ [definiţia interpretării i_s]

II. Dacă $i \neq \overline{1,n}$, atunci,

$i[\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)] = i(p_i)$ [definiţia *substituţiei*]

$= v(p_i)$ [definiţia interpretării i]

$= v_s[\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)]$ [definiţia valuării v_s]

$= i_s[\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)]$ [definiţia interpretării i_s].

Pasul inductiv: $c(\varphi) = n$ şi $i(\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)) = i_s[\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)]$ pentru orice formulă φ astfel încât $c(\varphi) < n$. Deosebim două cazuri:

III. $\varphi = (\neg\psi)$ şi $c(\psi) < n$. În acest caz:

$i(\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)) = i(\neg(\psi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)))$ [definiţia *substituţiei*].

$$= \begin{cases} 0, \text{dacă } i(\psi(\varphi_1/p_1 ... \varphi_n/p_n)) = 1 \\ 1, \text{altfel} \end{cases} \text{[definiţia interpretării } i\text{]}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{dacă } i_s[\psi(\varphi_1/p_1 ... \varphi_n/p_n)] = 1 \\ 1, \text{altfel} \end{cases} \text{[ipoteza inducţiei]}$$

$= i_s[\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)]$ [definiţia interpretării i_s].

IV. $\varphi = (\psi\rightarrow\chi)$, iar $c(\psi)$, $c(\chi) < n$, de unde, conform ipotezei inducţiei, deducem că:

$i(\psi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)) = i_s[\psi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)]$ şi

$$i(\chi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)) = i_s[\chi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)].$$

Acum, $i(\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)]) = i(\psi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n) \rightarrow \chi(\varphi_1/p_1..., \varphi_n/p_n)) =$

$$= \begin{cases} 0, \text{dacă } i(\psi\psi\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_{\mathrm{n}}/p_n)) = 1,\ i(\chi\chi\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_{\mathrm{n}}/p_n)) = 0 \\ 1, \text{altfel} \end{cases} \text{[definiţia interpretării } i\text{]}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{dacă } i_s[\psi(\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_{\mathrm{n}}/p_n)] = 1,\ i_s[\chi(\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_{\mathrm{n}}/p_n)] = 0 \\ 1, \text{altfel} \end{cases} \text{[ipoteza inducţiei]}$$

$= i_s[\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)]$ [definiţia interpretării i_s].

Teorema 2.3: *Teorema substituţiei*: Fie $\varphi(p_1, ..., p_n)$, $\psi(q_1, ..., q_n)$, $\varphi_1, ..., \varphi_n \in$ *Form*, iar $p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n \in$ *Var*, astfel încât $i(\varphi(p_1, ..., p_n)) = i(\psi(q_1, ..., q_n))$, pentru orice evaluare v. În aceste condiţii, $i(\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)) = i(\psi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n))$.

Demonstraţie: prin asumpţie $i(\varphi(p_1, ..., p_n)) = i(\psi(q_1, ..., q_n))$ pentru orice evaluare v. Dar, pentru că variabilele propoziţionale $p_1..., p_n, q_1, ..., q_n$ sunt substituite de aceleaşi formule $\varphi_1, ..., \varphi_n$, avem:

$$i_s[\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)] = i_s[\psi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)]$$

Din *lema 2.7* ştim că:

$$i(\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)) = i_s[\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)] \text{ şi}$$
$$i(\psi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)) = i_s[\psi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)]$$

de unde deducem că

$$i(\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)) = i(\psi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)).$$

Teorema 2.4: *Teorema înlocuirii*: Fie $\varphi(p_1, ..., p_n)$, $\varphi_1, ..., \varphi_n$, $\psi_1, ..., \psi_n \in$ *Form*, iar $p_1, ..., p_n \in$ *Var*, astfel încât $i(\varphi_1) = i(\psi_1)$, pentru orice evaluare v. În aceste condiţii, $i(\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)) = i(\varphi(\psi_1/p_1, ..., \psi_n/p_n))$.

Demonstraţie: Din egalitatea $i(\varphi_1) = i(\psi_1)$, pentru orice evaluare v plus definiţiile evaluării v_s şi interpretării i_s, rezultă că:

$$(1)\ i_s[\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)] = i_s[\varphi(\psi_1/p_1, ..., \psi_n/p_n)].$$

Din *lema 2.7* rezultă că:

$$(2)\ i_s[\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)] = i(\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)).$$
$$(3)\ i_s[\varphi(\psi_1/p_1, ..., \psi_n/p_n)] = i(\varphi(\psi_1/p_1, ..., \psi_n/p_n)).$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă că:

$$i(\varphi(\varphi_1/p_1, ..., \varphi_n/p_n)) = i(\varphi(\psi_1/p_1, ..., \psi_n/p_n)).$$

Cele două teoreme prezintă un interes deosebit din două puncte de vedere. Pe de-o parte, reprezintă un instrument prin care putem prolifera tautologiile calculului propoziţional într-un mod algebric[21] iar pe de altă parte au o semnificaţie semantică crucială: ne spun că singurul conţinut semantic relevant pe care o propoziţie îl are este valoarea sa de adevăr.

Completitudinea calculului propoziţional (Kalmár)

Suntem în poziţia în care putem enunţa şi demonstra lema care stă la baza demonstraţiei de completitudine a lui Kalmár. Lema stabileşte o corespondenţă între sintaxa şi semantica calculului propoziţional, mai precis pune în corespondenţă 'calculele semantice' din tabelul de adevăr cu unele 'calcule sintactico-deductive'. Să vedem cum anume se realizează această corespondenţă.

Lema 2.8: *Lema lui Kalmár***:** Fie $\varphi(p_1, ..., p_m) \in Form$, v o evaluare oarecare şi i extensia corespunzătoare evaluării v. Definim:

$$(1)\ \ p_k^i = \begin{cases} p_k,\ \text{dacă } v(p_k) = 1 \\ (\neg p_k),\ \text{dacă } v(p_k) = 0 \end{cases},\ \text{unde } k \in \{1, \dots, m\}$$

şi

$$(2)\ \varphi^i = \begin{cases} \varphi,\ \text{dacă } i(\varphi) = 1 \\ \neg\varphi,\ \text{dacă } i(\varphi) = 0 \end{cases}$$

În aceste condiţii, $p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash \varphi^i$.

Demonstraţie: prin inducţie pe complexitatea formulei φ.

Baza: $c(\varphi) = 0$, aşadar $\varphi = p_k$. În acest caz avem două situaţii, în funcţie de valoarea $v(p_k)$

a) $v(p_k) = 1$ sau

b) $v(p_k) = 0$.

(i) Din a), identitatea $\varphi = p_k$ şi definiţia interpretării i, rezultă că $i(\varphi) = v(p_k) = 1$. Aşadar, conform cu (1), $p_k^i = p_k$ şi conform cu (2), $\varphi^i = p_k^i = p_k$.

[21] Pentru mai multe detalii cu privire la modul în care teorema substituţiei şi înlocuirii permit o abordare algebrică a proliferării tautologiilor logicii propoziţiilor vezi Dirk van Dalen [2004], *Logic and structure*, Berlin: Springer, p. 23.

Conform regulii AS, avem

$$p_k \vdash p_k\text{, adică } p_k^i \vdash \varphi^i.$$

(ii) Din b), identitatea $\varphi = p_k$ şi definiţia interpretării i, rezultă că $i(p_k) = v(p_k) = 0$. Aşadar, conform cu (1), $\varphi^i = p_k^i = (\neg p_k)$ şi conform cu (2), $p_k^i = (\neg p_k)$.

Conform regulii AS avem:

$$(\neg p_k) \vdash (\neg p_k)\text{, adică } p_k^i \vdash \varphi^i.$$

Din (i) şi (ii) rezultă că lema se confirmă pentru cazul $c(\varphi) = 0$. Rămâne să demonstrăm pasul inductiv.

Pasul inductiv: fie $c(\varphi) = n$, $n > 0$. Conform *ipotezei inducţiei* presupunem că lema este adevărată pentru orice $k < n$. Din $c(\varphi) = n$, $n > 0$ şi *corlarul 2.1* rezultă că formula φ poate avea doar două forme: $\varphi = (\neg\psi)$, $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde $c(\psi) < n$ şi $c(\chi) < n$. În acord cu aceste forme pe care le poate avea o formulă $\varphi \in Form$ vom subdiviza demonstraţia pasului inductiv în două cazuri, un caz în care $\varphi = (\neg\psi)$ şi un altul în care $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$. Să le considerăm pe rând.

Cazul I: $\varphi = (\neg\psi)$ Evident, în această situaţie $\varphi(p_1, ..., p_m) = \psi(p_1, ..., p_m)$, iar $c(\psi) < n$. În funcţie de valorile semantice ale lui $i(\psi)$ dividem cazul I în două subcazuri:

Subcazul Ia. $i(\psi) = 0$. Conform definiţiei interpretării i rezultă că $i(\varphi) = i(\neg\psi) = 1$. Aşadar, conform cu (2), $\psi^i = (\neg\psi)$ şi $\varphi^i = \varphi = (\neg\psi)$. Ipoteza inducţiei[22] (a cărei aplicabilitate e garantată de faptul că $c(\psi) < n$) ne permite să asertăm:

$$p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash \psi^i.$$

adică,

$$\text{(iii)}\ \ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash (\neg\psi).$$

Din (iii) şi identitatea $\varphi^i = \varphi = (\neg\psi)$ rezultă:

$$(\alpha)\ \ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash \varphi^i.$$

Subcazul Ib. $i(\psi) = 1$. Conform definiţiei interpretării i rezultă că $i(\varphi) = i(\neg\psi) = 0$. Aşadar, conform cu (2) $\psi^i = \psi$ şi $\varphi^i = (\neg(\neg\psi))$. Ipoteza inducţiei ne permite să asertăm:

$$p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash \psi^i.$$

[22] În continuare, vom eluda justificarea apelului la ipoteza inducţiei.

adică,

$$\text{(iv)}\ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash \psi$$

Conform cu $\mathbf{T_2}$ şi THIN:

$$\text{(v)}\ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash (\psi \to (\neg(\neg\psi)))$$

Din *mp* aplicat paşilor (iv), (v) rezultă:

$$\text{(vi)}\ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash (\neg(\neg\psi))$$

Din (vi) şi identitatea $\varphi^i = (\neg(\neg\psi))$ rezultă că:

$$(\beta)\ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash \varphi^i$$

Cazul II: $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde $\varphi(p_1, ..., p_m)$, $\psi(q_1, ..., q_j)$, $\chi(r_1, ..., r_k)$, $j, k \leq m$, $\{p_1, ..., p_m\} = \{q_1, ..., q_j\} \cup \{r_1, ..., r_k\}$ iar $c(\psi)$, $c(\chi) < n$. În funcţie de valorile de adevăr $i(\psi)$ şi $i(\chi)$ distingem trei cazuri relevante:

Subcazul IIa. $i(\psi) = 0$ [valoarea lui $i(\chi)$ este irelevantă[23]]. Conform definiţiei interpretării i, rezultă că $i(\varphi) = i(\psi \to \chi) = 1$. Aşadar, conform cu (2) $\psi^i = \neg\psi$ şi $\varphi^i = \varphi = (\psi \to \chi)$. Ipoteza inducţiei ne permite să asertăm:

$$q_1^i,\ q_2^i, ...,\ q_j^i \vdash \psi^i$$

adică,

$$\text{(IH)}\ q_1^i,\ q_2^i, ...,\ q_j^i \vdash (\neg\psi)$$

Din (IH) şi THIN rezultă:

$$q_1^i,\ q_2^i, ...,\ q_j^i \cup \{r_1^i,\ r_2^i, ...,\ r_k^i\} \vdash (\neg\psi), \text{ adică}$$

$$\text{(vii)}\ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash (\neg\psi)$$

Din $\mathbf{T_3}$ şi regula THIN avem:

$$\text{(viii)}\ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash ((\neg\psi) \to (\psi \to \chi))$$

Din *mp* aplicat paşilor (vii), (viii) rezultă:

$$\text{(ix)}\ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash (\psi \to \chi).$$

Din (ix) şi identitatea $\varphi^i = (\psi \to \chi)$ rezultă:

$$(\gamma)\ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash \varphi^i$$

---

[23] Dacă $i(\psi) = 0$, atunci, în conformitate cu definiţia interpretării i, clauza 3, valoarea lui $i(\chi)$ nu influenţează valoarea de adevăr a formulei $(\psi \to \chi)$ în interpretarea i.

Subcazul IIb. $i(\chi) = 1$ [valoarea lui $i(\psi)$ este irelevantă[24]].
Conform definiţiei interpretării i rezultă că $i(\varphi) = i(\psi \to \chi) = 1$. Aşadar, conform cu (2) $\chi^i = \chi$ şi $\varphi^i = \varphi = (\psi \to \chi)$. Ipoteza inducţiei ne permite să asertăm:

$$r_1^i,\ r_2^i,\ ...,\ r_k^i \vdash \chi^i$$

adică,

$$\text{(IH)}\ r_1^i,\ r_2^i,\ ...,\ r_k^i \vdash \chi$$

Din (IH) şi THIN rezultă:

$$r_1^i,\ r_2^i,\ ...,\ r_k^i \cup \{q_1, ..., q_j\} \vdash \chi, \text{ adică:}$$

$$\text{(x)}\ \ p_1^i,\ p_2^i,\ ...,\ p_m^i \vdash \chi$$

Din $\mathbf{T_4}$ şi regula THIN avem:

$$\text{(xi)}\ \ p_1^i,\ p_2^i,\ ...,\ p_m^i \vdash (\chi \to (\psi \to \chi))$$

Din *mp* aplicat paşilor (x) şi (xi) rezultă:

$$\text{(xii)}\ \ p_1^i,\ p_2^i,\ ...,\ p_m^i \vdash (\psi \to \chi)$$

Din (xii) şi identitatea $\varphi^i = \varphi = (\psi \to \chi)$ rezultă că:

$$(\delta)\ \ p_1^i,\ p_2^i,\ ...,\ p_m^i \vdash \varphi^i$$

Subcazul IIc. $i(\psi) = 1$ şi $i(\chi) = 0$. Conform definiţiei interpretării i rezultă că $i(\varphi) = i(\psi \to \chi) = 0$. Aşadar, conform cu (2) $\psi^i = \psi$, $\chi^i = \neg\chi$ şi $\varphi^i = (\neg(\psi \to \chi))$. Ipoteza inducţiei ne permite să asertăm:

$$(\text{IH}\psi)\ q_1^i,\ q_2^i,\ ...,\ q_j^i \vdash \psi^i$$

$$(\text{IH}\chi)\ r_1^i,\ r_2^i,\ ...,\ r_k^i \vdash \chi^i$$

Din aplicarea regulii THIN la (IHψ) şi (IHχ) rezultă:

$$q_1^i,\ q_2^i,\ ...,\ q_j^i \cup \{r_1, ..., r_k\} \vdash \psi^i,$$

$$r_1^i,\ r_2^i,\ ...,\ r_k^i \cup \{q_1, ..., q_j\} \vdash \chi^i, \text{ adică}$$

$$\text{(xi)}\ \ p_1^i,\ p_2^i,\ ...,\ p_m^i \vdash \psi$$

$$\text{(xii)}\ \ p_1^i,\ p_2^i,\ ...,\ p_m^i \vdash (\neg\chi)$$

[24] Dacă $i(\chi) = 1$, atunci, în conformitate cu definiţia interpretării i, clauza 3, valoarea lui $i(\psi)$ nu influenţează valoarea de adevăr a formulei $(\psi \to \chi)$ în interpretarea i.

Din $\mathbf{T_5}$ şi regula THIN avem:

$$\text{(xiii)}\ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash (\psi \to ((\neg\chi) \to (\neg(\psi \to \chi))))$$

Din *mp* aplicat paşilor (xi) şi (xiii) rezultă:

$$\text{(xiv)}\ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash ((\neg\chi) \to (\neg(\psi \to \chi)))$$

Din *mp* aplicat paşilor (xii) şi (xiv) rezultă:

$$\text{(xv)}\ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash (\neg(\psi \to \chi))$$

Din (xv) şi identitatea $\varphi^i = (\neg(\psi \to \chi))$ rezultă că:

$$(\varepsilon)\ p_1^i,\ p_2^i, ...,\ p_m^i \vdash \varphi^i$$

Din (α), (β), (γ), (δ), (ε) rezultă demonstraţia pasului inductiv şi, prin aceasta, demonstraţia lemei.

Acum suntem în poziţia de a demonstra completitudinea sistemului axiomatic propoziţional descris.

Teorema 2.5: Teorema de completitudine: Dacă $\models \varphi$, atunci $\vdash \varphi$.

Demonstraţie: Fie $\varphi(p_1, ..., p_m) \in Form$. Conform ipotezei teoremei de completitudine, φ este o tautologie, adică, în acord cu definiţia tautologiei, $i(\varphi)= 1$ pentru orice evaluare v a variabilelor propoziţionale $p_1, ..., p_m$, de unde deducem că pentru orice interpretare i care extinde evaluarea v, $\varphi^i = \varphi$. Din cele 2^m evaluări posibile ale variabilelor $p_1, ..., p_m$ ale formulei φ, grupăm toate evaluările v_i şi v_j, (şi extensiile corespunzătoare acestora, i şi j) care respectă condiţia[25]:

$$i)\ v_i\restriction\{p_1, p_2, ..., p_{m-1}\} = v_j\restriction\{p_1, p_2, ..., p_{m-1}\},\ v_i(p_m) = 1 \text{ şi } v_j(p_m) = 0.$$

Din asumpţia că φ este o tautologie, rezultă că $\varphi^i = \varphi^j = \varphi$, aşadar, pentru oricare dintre evaluările v_i şi v_j care respectă condiţia *i*), *lema 2.7* (*lema lui Kalmár*) ne permite să asertăm:

$$\text{a)}\ p_1^i,\ p_2^i, ..., p_m \vdash \varphi$$

$$\text{b)}\ p_1^j,\ p_2^j, ..., (\neg p_m) \vdash \varphi$$

Aplicând teorema deducţiei la a) şi b) obţinem:

$$\text{1)}\ p_1^i,\ p_2^i, ..., p_{m-1}^i \vdash (p_m \to \varphi)$$

[25] Existenţa unor astfel de evaluări nu este greu de demonstrat, după cum o examinare sumară a tabelului de adevăr al formulei $\varphi(p_1, ..., p_m)$ ne indică.

$$2)\ p_1^j,\ p_2^j, ..., p_{m-1}^j \vdash ((\neg p_m) \rightarrow \varphi)$$

Din *i*) rezultă că

$$3)\ p_1^i = p_1^j,\ p_2^i = p_2^j, ..., p_{m-1}^i = p_{m-1}^j,$$

Din 2) şi 3) rezultă

$$4)\ p_1^i,\ p_2^i, ..., p_{m-1}^i \vdash ((\neg p_m) \rightarrow \varphi)$$

Din $\mathbf{T_6}$ şi THIN obţinem

$$5)\ p_1^i,\ p_2^i, ..., p_{m-1}^i \vdash ((p_m \rightarrow \varphi) \rightarrow (((\neg p_m) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$$

Din *mp* aplicat paşilor 1. şi 5. rezultă:

$$6)\ p_1^i,\ p_2^i, ..., p_{m-1}^i \vdash (((\neg p_m) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$$

Din *mp* aplicat paşilor 4. şi 6. rezultă:

$$7)\ p_1^i,\ p_2^i, ..., p_{m-1}^i \vdash \varphi.$$

După ce am aplicat procedeul de mai sus tuturor celor 2^m evaluări ale formulei $\varphi(p_1, ..., p_m)$, vom rămâne cu $2^m/2$ evaluări (demonstraţi acest fapt!) şi p_{m-1} variabile.

În continuare, adaptăm[26] condiţia *i*) celor p_{m-1} variabile şi reaplicăm pasul de mai sus celor $2^m/2$ evaluări rămase; după $2^m/2$ aplicări ale procedeului descris mai sus vom obţine $\vdash \varphi$.

Să clarificăm demonstraţia teoremei de completitudine cu ajutorul unui exemplu. Fie tautologia $\varphi(p_1, p_2) = ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1))$. Numărul tuturor evaluărilor posibile ale formulei $\varphi(p_1, p_2)$ este $\#v(\varphi(p_1, p_2)) = 2^{\overline{vp(\varphi(p_1, p_2))}} = 2^2 = 4$, iar evaluările sunt:

(i) $v_1(p_1) = 0,\ v_1(p_2) = 0$

(ii) $v_2(p_1) = 0,\ v_2(p_2) = 1$

(iii) $v_3(p_1) = 1,\ v_1(p_2) = 0$

(iv) $v_4(p_1) = 1,\ v_4(p_2) = 1$

Condiţia *i*) grupează evaluările (i) şi (ii), pe de-o parte, şi evaluările (iii) şi (iv) pe de altă parte. Să le considerăm pe rînd. Conform *lemei lui Kalmár*, din (i) (ii) şi faptul că $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1))$ este o tautologie, rezultă:

---

[26] Condiţia i) este modificată corespunzător: *i)* $v_i \upharpoonright \{p_1, p_2, ..., p_{m-2}\} = v_j \upharpoonright \{p_1, p_2, ..., p_{m-2}\}$, $v_i(p_{m-1}) = 1$ şi $v_j(p_{m-1}) = 0$.

$$\text{a) } \neg p_1, \neg p_2 \vdash ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1))$$
$$\text{b) } \neg p_1, p_2 \vdash ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1))$$

Prin aplicarea teoremei deducţiei la a) şi b) obţinem:

$$1)\ \neg p_1 \vdash (\neg p_2 \to ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)))$$
$$2)\ \neg p_1 \vdash (p_2 \to ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)))$$

Din $\mathbf{T_6}$ şi THIN obţinem

$$3)\ \neg p_1 \vdash ((p_2 \to ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1))) \to (((\neg p_2) \to ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1))) \to ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)))$$

Prin două aplicări ale regulii *mp* obţinem:

$$4)\ \neg p_1 \vdash ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1))$$

Aplicând procedeul de mai sus evaluărilor (iii) şi (iv) obţinem:

$$5)\ p_1 \vdash ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1))$$

Acum, evaluărilor 4) şi 5) le reaplicăm pasul de mai sus: le grupăm în funcţie de condiţia *i*), adaptată la cele p_{m-1} variabile propoziţionale şi parcurgem etapele a), b) şamd. La finalul acestui reaplicări a pasului de mai sus vom obţine:

$$\vdash ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1))$$

După cum menţionam în observaţia care a succedat demonstraţia *teoremei de deducţie* şi se poate observa din exemplul de mai sus, sensul în care calificăm demonstraţia de completitudine a lui Kalmár ca fiind constructivă sau efectivă este dat de prezenţa unei reţete de construire a demonstraţiei unei tautologii în cadrul sistemului axiomatic descris. Pentru că reţeta face apel la *teorema deducţiei* şi *lema 2.8*, funcţionarea ei este condiţionată de caracterul constructiv sau efectiv al acestor ultime două rezultate. Atât *teorema deducţiei* cât şi *lema 2.8*, după cum se poate observa din demonstraţiile celor două rezultate, au un caracter constructiv. În continuare, însă, nu vom insista asupra caracterului constructiv al *teoremei de duducţie*, despre care am vorbit, dar ne vom concentra analiza aupra caracterului constructiv al *lemei lui Kalmár*, unde vom nota câteva neclarităţi şi probleme, pe care le vom soluţiona.

Nucleul demonstraţiei lemei lui Kalmár constă din construirea sistematică, în cadrul sistemului axiomatic considerat, a unui pandant sintactico-deductiv al 'calculelor semantice' pe care le putem efectua. Să detaliem ce anume presupune şi cum se poate realiza această oglindire a 'calculelor semantice' prin 'calcule sintactico-deductive'[27]. În acest scop, distingem două perspective, corespunzătoare modalităţilor prin care putem efectua calcule semantice: fie pornim de la evaluări particulare ale variabilelor unei formule oarecare şi determinăm valoarea de adevăr a formulei în discuţie, o perspectivă pe care o putem descrie ca fiind 'de jos în sus', fie pornim de la o valoare de adevăr fixată a unei formule oarecare şi, prin calcule semantice succesive, determinăm evaluarea/evaluările variabilelor care pot genera valoarea de adevăr fixată a formulei, perspectivă pe care o putem descrie ca fiind 'de sus în jos'. După cum subliniam mai sus, lema lui Kalmár oferă o modalitate de construcţie a unui pandant sintactico-deductiv corespunzător calculelor semantice, pandant reprezentat de relaţia de deductibilitate dintre produsul sintactic p_1^i, p_2^i, ..., p_m^i, rezultat prin transformarea, în conformitate cu relaţia (1), a valorilor variabilelor $p_1, p_2, ..., p_m$ ale unei formule $\varphi(p_1, p_2, ..., p_m)$, într-o evaluare oarecare v, şi produsul sintactic $\varphi(p_1, p_2, ..., p_m)^i$, rezultat prin transformarea, în conformitate cu relaţia (2), a valorii formulei $\varphi(p_1, p_2, ..., p_m)$ în interpretarea i, care extinde evaluarea v în discuţie. Aşadar, putem deduce că există un pandant deductiv corespunzător fiecăreia dintre cele două perspective descrise mai sus. Prima perspectivă o regăsim în explicaţia pe care Stephen Cole Kleene o oferă lemei lui Kalmár în *Mathematical logic*[28], în timp ce a doua perspectivă este expusă de Alonzo Church în *Introduction to mathematical logic*[29].

Pentru a clarifica modul în care demonstraţia lemei lui Kalmár construieşte pandantele deductive ale calculelor semantice, să considerăm formula $\varphi(p_1, p_2, p_3) = (p_1 \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow p_3))$. Conform perspectivei 'de jos în sus' pornim de la o evaluare a variabilelor acestei formule şi determinăm, pas cu pas, valoarea de adevăr a formulei φ. Fie, aşadar, evaluarea v:

$$v(p_1) = 1$$
$$v(p_2) = 1$$
$$v(p_3) = 0.$$

---

[27] Pentru detalii cu privire la analiza demonstraţiei lemei lui Kalmár a se vedea şi: Adrian Luduşan [2009], 'On the effectiveness of Kalmár's completeness proof for propositional calculus' în *Logos Architekton*, Vol. 3, No. 1.

[28] Vezi Stephen Cole Kleene [2002] *Mathematical logic*, § 12, Mineola, New York: Dover dar şi Stephen Cole Kleene [1952], *Introduction to metamathematics*, § 29, Amsterdam: North-Holland.

[29] Alonzo Church [1956], *Introduction to mathematical logic*, Princeton, NJ: Princeton University Press, p. 163.

Cu această evaluare putem să determinăm în mod mecanic valoarea de adevăr a formulei $\varphi(p_1, p_2, p_3)$ prin determinarea, în paşi succesivi, a valorilor de adevăr ale subformulelor formulei $\varphi(p_1, p_2, p_3)$, culminând, evident, cu valoarea formulei. Calculele semantice prin care determinăm valoarea de adevăr a formulei sunt reprezentate în 'arborele' din stînga iar în 'arborele' din dreapta sunt reprezentate calculele deductive corespunzătoare celor semantice, respectiv relaţiile de deductibilitate dintre produsele sintactice obţinute în conformitate cu (1) şi (2), în evaluarea v şi extensia corespunzătoare i.

Linia 0	$p_1 \to (\neg p_2 \to p_3)$	$p_1 \to (\neg p_2 \to p_3)$
Linia 1	$\underline{\quad 1 \quad}$	$\underline{p_2}$
Linia 2	$\underline{\ 0 \qquad 0\ }$	$\neg\underline{\neg p_2 \quad \neg p_3}$
Linia 3	$\underline{1 \qquad\quad 1 \quad}$	$\underline{p_1 \quad (\neg p_2 \to p_3)}$
Linia 4	1	$p_1 \to (\neg p_2 \to p_3))$

Să detaliem, pe acest exemplu, corespondenţa calculului semantic cu cel deductiv.

Linia 1. Calculul semantic constă din înregistrarea valorii variabilei p_2 în evaluarea v, adică $v(p_2) = 1$; produsul sintactic corespunzător este rezultatul obţinut în conformitate cu definiţia (1), pentru $v(p_2) = 1$, adică $p_2^i = p_2^v = p_2$.

Linia 2. De la $v(p_2) = 1$ obţinem, prin calcul semantic, mai precis prin intermediul definiţiei interpretării i, $i(\neg p_2) = 0$; produsele sintactice corespunzătoare lui $v(p_2) = 1$ şi $i(\neg p_2) = 0$ sunt p_2 şi $\neg\neg p_2$ (conform cu (1) şi (2)) iar relaţia de deductibilitate prin care din p_2 deducem $\neg\neg p_2$, simbolic $p_2 \vdash \neg\neg p_2$, corespunzătoare calculului semantic este asigurată de teorema $\mathbf{T_2}$, cu $\varphi = p_2$, şi THIN. Deducţia este cât se poate de simplă:

1. $p_2 \vdash p_2$ [AS]
2. $p_2 \vdash (p_2 \to \neg\neg p_2)$ [$\mathbf{T_2}$ şi THIN]
3. $p_2 \vdash \neg\neg p_2$ [1. 2. *mp*]

Celelalte valori aflate pe această linie sunt evidente: $v(p_3) = 0$ şi $p_3^i = p_3^v = \neg p_3$ conform definiţiei (1) din lema lui Kalmár.

Mai general, fiecărui posibil calcul semantic îi este pus în corespondenţă un calcul deductiv, specificat în funcţie de forma sintactică a formulei şi valoarea i a acesteia într-unul dintre subcazurile demonstraţiei lemei. De pildă, în situaţia de mai sus ne aflăm în subcazul **IIb** al demonstraţiei lemei: $(\neg p_2)$ are forma sintactică $(\neg\psi)$ şi $i(\psi) = i(p_2) = v(p_2) = 1$.

Linia 3 De la $i(\neg p_2) = 0$ şi $v(p_3) = 0$ obţinem, prin calcul semantic, $i(\neg p_2 \rightarrow p_3) = 1$; produsele sintactice corespunzătoare lui $i(\neg p_2) = 0$, $v(p_3) = 0$ şi $i(\neg p_2 \rightarrow p_3) = 1$ sunt $\neg\neg p_2$, $\neg p_3$ respectiv $(\neg p_2 \rightarrow p_3)$ iar relaţia de deductibilitate $\neg\neg p_2, \neg p_3 \vdash (\neg p_2 \rightarrow p_3)$ corespunzătoare calculului semantic este asigurată de teorema **T₃** cu $\varphi = \neg p_2$, $\psi = p_3$, şi THIN. Situaţia de mai sus corespunde cazului **IIa** din demonstraţia lemei lui Kalmár.

Exerciţii: *1*) Deduceţi formula $(\neg p_2 \rightarrow p_3)$ din asumpţiile $\neg\neg p_2$, $\neg p_3$, folosind **T₃**.
2) Specificaţi cazul din demonstraţia lemei lui Kalmár în care se încadrează situaţia din *linia 4*
3) Deduceţi formula $(p_1 \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow p_3))$ din asumpţiile p_1, $(\neg p_2 \rightarrow p_3)$, folosind teorema invocată în cazul corespunzător *liniei 4* din demonstraţia lemei lui Kalmár.

Acum, în acord cu perspectiva ‘de sus în jos’ putem porni de la o valoarea de adevăr a unei formule şi să determinăm evaluările/evaluarea compatibile/ă[30] cu această valoare a formulei iar acest proces semantic va fi oglindit printr-unul sintactic-deductiv.

După cum menţionam mai sus, acest mod de a înţelege demonstraţia lemei lui Kalmár i se poate atribui lui Alonzo Church. Iată cum descrie Church caracterul efectiv al demonstraţiei lemei lui Kalmár, în *Introduction to mathematical logic*:

> The proof [of Kalmár’s lemma] is effective in the sense that it provides an effective method for finding a proof of $[\varphi^i]$ from the hypotheses $[\, p_1^i,\ p_2^i, \ldots,\ p_n^i \,]$. If $[\varphi]$ has no occurrences of →, this is provided directly. If $[\varphi]$ has occurrences of →, the proof provides directly an effective reduction of the problem of finding a proof of $[\varphi^i]$ from the hypotheses $[\, p_1^i,\ p_2^i, \ldots,\ p_n^i \,]$ to the two problems of finding proofs of $[\psi^i]$ and $[\chi^i]$ $[\varphi = (\psi \rightarrow \chi)]$ from the hypotheses $[\, p_1^i,\ p_2^i, \ldots,\ p_n^i \,]$, the same reduction may then be repeated upon the two latter problems, and so on; after a finite number of repetitions the process of reduction must terminate, yelding effectively a proof of $[\varphi^i]$ from the hypotheses $[\, p_1^i,\ p_2^i, \ldots,\ p_n^i \,]$ [31].

[30] Prin compatibil înţelegem orice evaluare v a variabilelor formulei a cărei extensie i atribuie formulei valoarea de adevăr fixată, de la care am pornit.
[31] În *Introduction to mathematical logic*, Curch foloseşte un sistem de calcul propoziţional cu un singur operator logic, implicaţia (→) şi o constantă ($\perp$) – absurdul. Negaţia este definită cu ajutorul implicaţiei şi absurdului, i.e $\neg p = (p \rightarrow \perp)$, motiv pentru care formulele calculului său nu conţin decât operatorul implicaţiei.

Să detaliem pe un exemplu cum anume funcţionează reducerea 'efectivă' despre care vorbeşte Alonzo Church în citatul de mai sus, iar în acest context să semnalăm şi rezolvăm o problemă neobservată care ţine de caracterul efectiv al reducerii.

Fie formula $\varphi = (p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)$, aşadar o formulă cu două variabile propoziţionale, p_1, p_2, $c(\varphi) = 3$ şi să presupunem că $i(\varphi) = 1$.
În această situaţie, conform cu (2),

$$\varphi^i = ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1))^i = ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)),$$

iar asumpţiile $p_1^i,\ p_2^i$ din care urmează să deducem φ^i sunt nedeterminate.
Să asertăm că $p_1^i,\ p_2^i, \ldots,\ p_n^i \vdash \varphi^i$, în cazul nostru, că

$$1)\ p_1^i,\ p_2^i \vdash ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)).$$

Acum, pentru că forma sintactică a formulei φ este $(\psi \to \chi)$, iar $i(\varphi) = 1$, rezultă, din definiţia interpretării i, că fie $i(p_1 \to p_2) = 0$, fie $i(\neg p_2 \to \neg p_1) = 1$. Acestui calcul semantic îi vom pune în corespondenţă unul sintactico-deductiv, iar în acest scop să observăm că atât $(p_1 \to p_2)$ cât şi $(\neg p_2 \to \neg p_1)$ au aceleaşi variabile propoziţionale, p_1, p_2, aşadar, asumpţiile din care vom deduce aceste două subformule sunt $p_1^i,\ p_2^i$, iar $c(p_1 \to p_2) = 1$ şi $c(\neg p_2 \to \neg p_1) = 2$.

Calculului semantic prin care am trecut de la $i(\varphi) = 1$ fie la $i(p_1 \to p_2) = 0$, fie la $i(\neg p_2 \to \neg p_1) = 1$ îi corespunde trecerea de la 1) la relaţiile de deductibilitate dintre $(p_1 \to p_2)^i$ şi asumpţiile $p_1^i,\ p_2^i$, pe de-o parte, sau $(\neg p_2 \to \neg p_1)^i$ şi asumpţiile $p_1^i,\ p_2^i$, pe de altă parte. Mai precis, vom reduce relaţia 1) la relaţia

$$2)\ p_1^i,\ p_2^i \vdash \neg(p_1 \to p_2),$$

sau

$$3)\ p_1^i,\ p_2^i \vdash (\neg p_2 \to \neg p_1).$$

Vorbim despre reducere pentru că în ambele situaţii fie că e vorba de trecerea de la 1) la 2) sau de la 1) la 3) s-a făcut de la o formulă cu complexitate mai mare la formule cu complexitate mai mică, $c(p_1 \to p_2), c(\neg p_2 \to \neg p_1) < c(\varphi)$.
Reducerea lui 1) la 2) este asigurată de $\mathbf{T_3}$ iar reducerea lui 1) la 3) este asigurată $\mathbf{T_4}$.
Explicit, din $\mathbf{T_3}$, cu $\varphi = (p_1 \to p_2)$, $\psi = (\neg p_2 \to \neg p_1)$, şi THIN obţinem:

$$4)\ p_1^i,\ p_2^i \vdash (\neg(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1))),$$

Din 2) şi 4), prin *modus ponens*, rezultă 1)

Similar, din $\mathbf{T_4}$, cu $\varphi = (p_1 \to p_2)$, $\psi = (\neg p_2 \to \neg p_1)$, şi THIN, obţinem:

$$5)\ p_1^i,\ p_2^i \vdash ((\neg p_2 \to \neg p_1) \to ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)))$$

Din 3) şi 5), prin *modus ponens*, rezultă 1).

Să notăm că reducerea lui 1) la 2), de pildă, s-a făcut în virtutea formei sintactice a formulei φ, respectiv $\varphi = (\psi \to \chi)$, şi a valorilor $i(\varphi) = 1$ şi $i(\psi) = 0$. Aceşti factori sunt surprinşi, în demonstraţia lemei, în subcazul **IIa**. Ca regulă generală, reducerile succesive se efectuează prin încadrarea formei sintactice a formulei şi a valorilor semantice ale formulei şi subformulelor sale imediate într-unul dintre subcazurile demonstraţiei lemei.

Exerciţiu: determinaţi conform cărui caz din demonstraţia lemei lui Kalmár s-a făcut reducerea de la 1) la 3).

Repetând în mod sistematic procedeul de mai sus vom reduce relaţiile de deductibilitate până la situaţia în care $c(\varphi) = 0$, adică, până la cazul de bază din demonstraţia lemei lui Kalmár. De pildă, dacă vom considera alternativa 3) din exemplul de mai sus, atunci, din $i(\neg p_2 \to \neg p_1) = 1$, $c(\neg p_2 \to \neg p_1) = 2$ şi faptul că forma sintactică a formulei $(\neg p_2 \to \neg p_1)$ este $(\psi \to \chi)$, rezultă, conform definiţiei lui i, că fie $i(\neg p_2) = 0$, fie $i(\neg p_1) = 1$, unde $c(\neg p_2) = c(\neg p_1) = 1$. Pentru a oglindi sintactico-deductiv acest calcul semantic, vom nota că formula $(\neg p_2)$ are o singură variabilă propoziţională, p_2 iar formula $(\neg p_1)$ are variabila p_1. Corespunzător, asumpţiile din care vom deduce $(\neg p_1)^i$ sau $(\neg p_2)^i$ sunt p_1^i respectiv p_2^i Mai precis, din $i(\neg p_2) = 0$, rezultă, conform cu (2), că $(\neg p_2)^i = \neg\neg p_2$ iar din $i(\neg p_1) = 1$ rezultă că $(\neg p_1)^i = \neg p_1$, aşadar relaţia 3) se reduce la:

$$6)\ p_2^i \vdash \neg\neg p_2 \text{ [prin } \mathbf{T_3}\text{] sau}$$

$$7)\ p_1^i, \vdash \neg p_1 \text{ [prin } \mathbf{T_4}\text{]}$$

Exerciţiu: indicaţi cum anume se poate obţine relaţia din 3) pornind de la 6) sau 7), folosind $\mathbf{T_3}$ respectiv $\mathbf{T_4}$.

Să considerăm, în continuare, alternativa 6). Din $i(\neg p_2) = 0$, $c(\neg p_2) = 1$ şi faptul că forma sintactică a formulei $(\neg p_2)$ este $(\neg\varphi)$ rezultă $i(p_2) = 1$, $c(p_2) = 0$. Pentru că formula p_2 are o singură variabilă propoziţională, reprezentată chiar de p_2, a cărei valoare de adevăr este acum determinată, $i(p_2) = 1$, asumpţia din care vom deduce formula p_2 este chiar p_2. Mai precis, conform cu (1) avem $p_2^i = p_2$. Aşadar, relaţia 6) se reduce la:

$$8)\ p_2 \vdash p_2,$$

Reducerea de la 6) la 8) este asigurată de $\mathbf{T_2}$, cu $\varphi = p_2$.
Pentru că $c(p_2) = 0$, am ajuns cu reducerea la cazul de bază din demonstraţia lemei lui Kalmár, caz justificat prin apel la regula AS.
Exerciţiu: pornind de la asumpţia din 8) reconstruiţi relaţia de deductibilitate reprezentată de 1) folosind paşii intermediari 6) şi 3).

Dar să vedem cum anume se reduce şi folosind ce scheme de teoreme, următoarea formulă, $\varphi = \neg(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$. Evident, φ are doar trei variabile propoziţionale, $p_1, p_2, p_3,$ iar $c(\varphi) = 3$. Să presupunem că formula φ este adevărată, adică $i(\varphi) = 1$. Urmând reţeta exemplului de mai sus, pornim de la $p_1^i,\ p_2^i,\ p_3^i \vdash \varphi^{i,}$ adică de la:

9) $p_1^i,\ p_2^i,\ p_3^i \vdash \neg(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$ [$\varphi^i = \neg(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$, pentru că $i(\varphi) = 1$]

Dat fiind că φ are forma sintactică $(\neg\psi)$ iar $i(\varphi) = 1$, rezultă, conform definiţiei interpretării i, că $i(\psi) = 0$, unde $c(\psi) = 2$. Acum, ψ are aceleaşi variabile propoziţionale ca φ, aşadar, calculului semantic prin care trecem de la $i(\varphi) = 1$ la $i(\psi) = 0$ îi corespunde reducerea relaţiei 9) la relaţia:

10) $p_1^i,\ p_2^i,\ p_3^i \vdash \neg(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$ [$\psi^i = \neg(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$, pentru că $i(\psi) = 0$]

Dar relaţia 10) este aceeaşi cu relaţia 9). În mod evident nu putem vorbi în acest caz de o reducere iar un prim lucru care se remarcă uşor este că, în conformitate cu definiţia (2) din lema lui Kalmár, φ^i şi ψ^i au aceeaşi formă deşi $c(\psi) < c(\varphi)$, ψ fiind o subformulă imediată a lui φ. În această situaţie ne aflăm în subcazul **Ia** al lemei, caz în care nu există nici o teoremă care să intermedieze trecerea de la $p_1^i,\ p_2^i,\ p_3^i \vdash \psi^i$ la $p_1^i,\ p_2^i,\ p_3^i \vdash \varphi^i$.

Se pare că aplicând, în acest caz, metoda demonstraţiei lemei lui Kalmár de a reduce relaţia de deductibilitate dintre formula φ^i şi asumpţiile $p_1^i,\ p_2^i,\ p_3^i$ la relaţii de deductibilitate mai 'simple' între ψ^i şi $p_1^i,\ p_2^i,\ p_3^i$ nu obţinem o reducere a relaţiei ci o identitate între relaţia de redus şi relaţia redusă. Reducerea în acest caz al lemei nu este chiar atât de ‘efectivă’ pe cât credea Alonzo Church, iar acest lucru se poate constata observând că demonstraţia acestui caz al lemei este asigurată de identitatea dintre φ^i şi ψ^i, deşi, evident, ψ este o subformulă proprie a lui φ. În acest caz, nu reducem efectiv relaţia de deductibilitate $p_1^i,\ p_2^i,\ p_3^i \vdash \varphi^i$ la relaţia de deductibilitate $p_1^i,\ p_2^i,\ p_3^i \vdash \psi^i$, ci profităm de faptul că produsele sintactice φ^i şi ψ^i sunt identice. Ca atare, acest caz este singurul în care nu este nevoie de folosirea vreunei scheme de teoreme ajutătoare, pentru că pasul de la relaţia de deductibilitate $p_1^i,\ p_2^i,\ p_3^i \vdash \varphi^i$ la relaţia $p_1^i,\ p_2^i,\ p_3^i \vdash \psi^i$ este imediat.

Nasol. Eh, nu este totul pierdut. În continuare, vom oferi o soluţie la această problemă dar nu vom articula soluţia în toate detaliile ei, ci ne vom mărgini să schiţăm cum anume putem să scurtcircuităm problema reducerii prin apel la celelalte cazuri ale demonstraţiei. Situaţia se poate remedia dacă vom proceda la următoarea subdivizare a cazului **I** al demonstraţiei lemei lui Kalmár, ţinând cont de complexitatea subformulei ψ:

Ia’. $\varphi = (\neg\psi)$, $i(\psi) = 0$ şi $c(\psi) = 0$

În acest caz, aplicăm metoda subcazului **Ia** al demonstraţiei lemei lui Kalmár.

Ia’’. $\varphi = (\neg\psi)$, $i(\psi) = 0$ şi $c(\psi) > 0$

Forma sintactică a lui ψ este fie $(\neg\chi)$, fie $(\chi \rightarrow \sigma)$.

1. $\psi = (\neg\chi)$. În acest caz, $i(\chi) = 1$, aplicăm metoda subcazului **Ib** al demonstraţiei lemei lui Kalmár.
2. $\psi = (\chi \rightarrow \sigma)$. În acest caz, $i(\chi) = 1$, $i(\sigma) = 0$, aplicăm metoda cazului **IIc** al lemei lui Kalmár.

Să vedem cum anume ne ajută subdivizarea pe care am propus-o să rezolvăm problema descompunerii formulei din exemplul anterior. Pornim de la $i(\varphi) = 1$, şi, în consecinţă, de la relaţia 9)

$$p_1^i,\ p_2^i,\ p_3^i \vdash \neg(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)),$$

dar în loc să procedăm la descompunerea acestei relaţii, după modelul furnizat de cazul **Ia** al demonstraţiei lemei lui Kalmár, vom ţine cont de faptul că $\varphi = (\neg\psi)$, $i(\psi) = 0$, $c(\psi) = 2$, iar forma sintactică a formulei ψ este $(\chi \rightarrow \sigma)$, unde $\chi = p_1$, $\sigma = (p_2 \rightarrow p_3)$, prin urmare vom aplica, conform subdiviziunii mai sus, cazul **IIa’2**, ceea ce înseamnă că $i(\chi) = 1$, $i(\sigma) = 0$, iar relaţia 9) se va descompune în relaţiile[32]:

[32] Descompunerea se face după cazul **IIc** al lemei lui Kalmár, aşa cum este specificat în cazul **IIa’2**.

$$11)\ p_1 \vdash p_1$$

şi

$$12)\ p_1^i,\ p_2^i \vdash \neg(p_2 \to p_3)$$

Lăsăm în sarcina cititorului descompunerea, în continuare, a relaţiilor 11) şi 12), până la cazurile de bază, în conformitate cu subdiviziunea propusă de noi; sperăm că în acest fel cititorul va dobândi o convingere practică a viabilităţii soluţiei propuse.

Demonstraţia de tip Henkin a completitudinii calculului propoziţional.

Să începem demonstraţia de tip Henkin a calculului propoziţional stabilind un rezultat fundamental: *teorema de corectitudine*. În acest scop să demonstrăm, în prealabil, următorul rezultat:

Lema 2.9: Dacă $\vdash \varphi$, atunci $\models \varphi$ (teoremele $\mathbf{C_p}$ sunt tautologii.)

Demonstraţie: [prin inducţie pe lungimea demonstraţiei formulelor]
Cazul de bază $l_d = 1$. În conformitate cu definiţia demonstrabilităţii, singurele demonstraţii care au lungimea 1 sunt cele în care formula de demonstrat este o instanţă a unei scheme de axiome din **Ax**. Deşi mulţimea **Ax** este formată dintr-o infinitatea de axiome, conform *teoremei substituţiei* este suficient să stabilim caracterul tautologic al celor trei scheme de axiome din **Ax** pentru a stabili, prin aceasta, caracterul tautologic al tuturor instanţelor obţinute din aceste scheme de axiome.
Fie, de exemplu, prima schemă de axiomă:

$$\mathbf{Ax_1}: (\varphi \to (\psi \to \varphi))$$

Putem verifica validitatea acestei scheme fie direct prin tabelele de adevăr fie prin *reducere la absurd*. De exemplu, prin *reductio*, presupunem că există o evaluare v astfel încât $i(\varphi \to (\psi \to \varphi)) = 0$. Dar, în acest caz, $i(\varphi) = 1$ şi $i(\psi \to \varphi) = 0$. Dacă $i(\psi \to \varphi) = 0$, atunci $i(\psi) = 1$ şi $i(\varphi) = 0$. Contradicţie.
Demonstraţii analoage pot fi date tuturor celorlalte scheme de axiome.
Pasul inductiv: Fie $\varphi \in$ *Form*. Presupunem că pentru orice demonstraţie $<\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}>$, de lungime $l_d = n-1$, şi orice φ_i, $i < n$ este valabilă relaţia: dacă $\vdash \varphi_i$, atunci $\models \varphi_i$ (*ipoteza inducţiei*). Să adăugăm o nouă linie acestei demonstraţii care face ca lungimea demonstraţiei să fie $l_d = n$ şi să notăm cu φ noua formulă derivată. Ceea

ce trebuie să arătăm este că formula φ, situată pe această nouă linie, n, a demonstraţiei, este o tautologie. Conform definiţiei demonstraţiei, singurele modalităţi prin care putem să adăugăm o formulă într-o demonstraţie sunt prin instanţierea unei scheme de axiome sau prin aplicarea regulii *modus ponens* asupra a două formule precedente. În prima situaţie, formula adăugată este o tautologie, aşa cum am stabilit în cazul de bază. În cea de-a doua situaţie, formula φ a fost obţinută din două alte formule φ_i şi φ_k, i, $k < n$, prin *modus ponens*. Evident, φ_i şi φ_k sunt de forma ψ şi $(\psi \rightarrow \chi)$ [altfel *modus ponens* nu ar fi aplicabilă]. Pentru că i, $k < n$, *ipoteza inducţiei* se aplică acestor formule, adică φ_i şi φ_k sunt tautologii. Prin urmare, $\models \psi$ şi $\models (\psi \rightarrow \chi)$. Acum, să presupunem prin *reductio* că $\not\models \chi$. Atunci există o evaluarea v astfel încât $i(\chi) = 0$. Pentru că ψ şi $(\psi \rightarrow \chi)$ sunt tautologii rezultă că în aceeaşi evaluare v avem $i(\psi) = 1$ şi $i(\psi \rightarrow \chi) = 1$. Dar din $i(\chi) = 0$ şi $i(\psi \rightarrow \chi) = 1$ rezultă $i(\psi) = 0$. Contradicţie. Dacă nu există nici o astfel de evaluare v, rezultă că din $\models \psi$ şi $\models (\psi \rightarrow \chi)$ decurge $\models \chi$.

Teorema 2.6: *Teorema de corectitudine*: Dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \models \varphi$.

Demonstraţie: să presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform definiţiei deductibilităţii există un şir finit de formule $<\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n>$, $\varphi_i \in Form$, $1 \leq i \leq n$, $\varphi_n = \varphi$, astfel încât pentru orice formulă φ_k, $1 \leq k \leq n$, fie $\varphi_k \in$ **Ax**, fie $\varphi_k \in \Gamma$, fie φ_k rezultă prin aplicarea regulii *modus ponens* din φ_i, φ_j unde $i, j < k$. Cu alte cuvinte, singura diferenţă faţă de demonstraţia *lemei 2.9* este cazul în care $\varphi_k \in \Gamma$. Ca atare, demonstraţia teoremei de corectitudine se poate realiza tot prin inducţie pe lungimea demonstraţiilor, cu precizarea că demonstraţia cazului de bază include şi cazul în care formula φ este una din asumpţiile din Γ. Corespunzător,

Cazul de bază $l_d = 1$. În conformitatea cu definiţia deducţiei, fie $\varphi \in$ **Ax**, fie $\varphi \in \Gamma$. Dacă $\varphi \in$ **Ax**, atunci $\vdash \varphi$, şi conform *lemei 2.9*, $\models \varphi$, de unde, mai departe, prin aplicarea regulii THIN, deducem $\Gamma \models \varphi$. Dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \models \varphi$, pentru că, pentru orice evaluare v, din $i(\Gamma) = 1$ rezultă $i(\varphi) = 1$ [$\varphi \in \Gamma$ şi *a fortiori* orice model al lui Γ este un model al lui φ].

Pasul inductiv

Pasul inductiv stabileşte că regulile de deducţie ale sistemului prezervă proprietatea pe care cazurile de bază o au iar cum singura regulă a sistemului deductiv este *modus ponens* demonstraţia pasului inductiv este aceeaşi cu cea din demonstraţia *lemei 2. 9*.

Pentru a facilita demonstraţiile următoare, convenim să notăm prin $\perp$ o contradicţie semantică sau o formulă inconsistentă oarecare din calculul propoziţional dezvoltat de noi. Convenţional, stabilim că $\perp = \neg(\varphi \to \varphi)$, dar $\perp$ poate fi orice altă contradicţie a calculului propoziţional.
Exerciţiu: convingeţi-vă că formula $\neg(\varphi \to \varphi)$ este inconsistentă semantic prin metoda tablourilor de adevăr.

Definiţie 2.17: (*consistenţă sintactică*): O mulţime $\Gamma \subset Form$ este *consistentă sintactic* ddacă $\Gamma \nvdash \perp$. Corelativ, spunem că o mulţime de propoziţii $\Gamma \subseteq Form$ este *inconsistentă sintactic* ddacă $\Gamma \vdash \perp$

Intuitiv, o mulţime oarecare de propoziţii este consistentă ddacă din această mulţime nu putem deduce o contradicţie. Cu ajutorul acestei definiţii putem demonstra – şi acesta este sensul lemei de mai jos – echivalenţa unor formulări diferite ale conceptului de consistenţă:

Lema 2.10: *Lema de echivalenţă a definiţiilor*: Fie $\Gamma \subset Form$. În aceste condiţii, următoarele sunt echivalente:

a) există o formulă $\varphi \in Form$ astfel încât $\Gamma \vdash \varphi$ şi $\Gamma \vdash \neg\varphi$.
b) $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in Form$.
c) $\Gamma \vdash \perp$

Demonstraţie (I) *a)* $\to$ *b)*. Fie $\psi \in Form$ o formulă oarecare. Conform cu *a)*, există o formulă $\varphi \in Form$ astfel încât:
1. $\Gamma \vdash \varphi$
2. $\Gamma \vdash \neg\varphi$
3. $\Gamma \vdash ((\neg\varphi) \to (\varphi \to \psi))$ [$\mathbf{T_3}$ + THIN]
4. $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$ [2, 3 *mp*]
5. $\Gamma \vdash \psi$ [1, 4 *mp*]

(II) *b)* $\to$ *c)*. Fie $\varphi \in Form$ o formulă oarecare. Conform cu *b)*:
1. $\Gamma \vdash \varphi$
2. $\Gamma \vdash \neg\varphi$ [$\neg\varphi \in Form$, prin urmare, conform cu *b)*, este derivabilă şi $\neg\varphi$]
3. $\Gamma \vdash (\varphi \to ((\neg\varphi) \to (\neg(\varphi \to \varphi))))$ [$\mathbf{T_5}[\varphi/\psi]$ + THIN]
4. $\Gamma \vdash ((\neg\varphi) \to (\neg(\varphi \to \varphi)))$ [1, 3, *mp*]
5. $\Gamma \vdash (\neg(\varphi \to \varphi))$ [2, 4, *mp*]
6. $\Gamma \vdash \perp$ [definiţia lui $\perp$]

(III) *c)* $\rightarrow$ *a)*. Fie $\psi \in Form$ o formulă oarecare.

1. $\Gamma \vdash \perp$
2. $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \psi)$ [definiţia lui $\perp$]
3. $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \psi)$ [T_1 + THIN]

Prin urmare există formula $\varphi = (\psi \rightarrow \psi)$ astfel încât $\Gamma \vdash \neg\varphi$ şi $\Gamma \vdash \varphi$.

Lema 2.11: Dacă o mulţime Γ de formule are un model, atunci Γ este consistentă.

Demonstraţie [prin *reductio*]: să presupunem că Γ are un model, dar nu este consistentă. Atunci, conform *lemei echivalenţei definiţiilor*, $\Gamma \vdash \perp$. Conform *teoremei de corectitudine* $\Gamma \models \perp$. Conform definiţiei *consecinţei semantice* şi faptului că $\perp$ este o *contradicţie semantică*, rezultă că Γ nu are nici un model, ceea ce contrazice presupunerea iniţială.

Lema 2.12: (*compactitate sintactică*) Fie $\Gamma \subset Form$ şi $\varphi \in Form$. Dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci există o submulţime finită $\Delta \subseteq \Gamma$ astfel încât $\Delta \vdash \varphi$.

Demonstraţie: dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci, conform definiţiei deductibilităţii, există un şir finit de formule $<\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n>$, $\varphi_i \in Form$, $1 \leq i \leq n$, $\varphi_n = \varphi$, care constituie o deducţie a formulei φ. Din această mulţime finită păstrăm doar acele formule φ_i, $1 \leq i \leq n$, care reprezintă asumpţii, adică acele $\varphi_i \in \Gamma$. Fie Δ această mulţime de asumpţii folosită în deducţia lui φ. În acest caz, Δ este o mulţime finită şi conţine doar asumpţiile din Γ folosite în demonstraţia formulei φ, prin urmare permite derivarea formulei φ, adică $\Delta \vdash \varphi$. Dacă în deducţia $<\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n>$ a formulei φ nu apare nici o formulă φ_i, $1 \leq i \leq n$, astfel încât $\varphi_i \in \Gamma$, atunci orice submulţime finită de formule din Γ poate fi aleasă.

Lema 2.13: $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă ddacă $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstraţie: **Suficienţa lemei**: presupunem că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă. Atunci, conform cazului *a)* al *lemei echivalenţei definiţiilor* există un $\psi \in Form$ astfel încât:

1. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ şi
2. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$
3. $\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ [1, *teorema deducţiei*]
4. $\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ [2, *teorema deducţiei*]
5. $\Gamma \vdash (((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow \varphi)$ [$\mathbf{T}_7$+ THIN]

6. $\Gamma \vdash ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$ [3, 5 *mp*]
7. $\Gamma \vdash \varphi$ [4, 6 *mp*]

Necesitatea lemei: să presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Atunci:
1. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ [din ipoteza necesităţii şi THIN]
2. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ [din AS]
3. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$ [din *lema echivalenţei definiţiilor*]

Lema 2.14: $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă ddacă $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Demonstraţie: **Suficienţa lemei**: presupunem că $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă Atunci, conform cazului *a)* al *lemei echivalenţei definiţiilor* există un $\psi \in$ *Form* astfel încât:
1. $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$
2. $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$
3. $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$ [1, *teorema deducţiei*]
4. $\Gamma \vdash (\varphi \to \neg\psi)$ [2, *teorema deducţiei*]
5. $\Gamma \vdash (((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \neg\psi)) \to \neg\varphi)$ [$\mathbf{T_8}$ + THIN]
6. $\Gamma \vdash ((\varphi \to \neg\psi)) \to \neg\varphi)$ [3, 5 *mp*]
7. $\Gamma \vdash \neg\varphi$ [4, 6 *mp*]

Necesitatea lemei să presupunem că $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Atunci:
1. $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ [din ipoteza necesităţii lemei şi THIN]
2. $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ [din AS]
3. $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \perp$ [din *lema echivalenţei definiţiilor*].

Definiţie 2.18: O mulţime $\Gamma \subseteq$ *Form* este maximal consistentă ddacă pentru orice formulă $\varphi \in$ *Form*, astfel încât $\varphi \notin \Gamma$, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \perp$.

Intuitiv, o mulţime de formule este maximal consistentă dacă şi numai dacă orice extensie a mulţimii, fie chiar şi cu o formulă φ, ar face mulţimea inconsistentă[33].

Acum, un pas esenţial în demonstraţiile de tip Henkin ale completitudinii este construcţia unei mulţimii maximale Γ de formule, pornind de la o mulţime oarecare consistentă Δ, fără a distruge, însă, consistenţa mulţimii Δ. În consecinţă, ceea ce ne propunem, în continuare, este să arătăm cum anume putem să adăugăm formule unei mulţimi consistente $\Delta \subset$ *Form* astfel încât să obţinem o mulţime maximală şi consistentă Γ.

[33] Acesta este, de fapt, sensul *definiţiei 2.18*.

Lema 2.15: *Lema lui Lindenbaum* Dacă $\Delta \subset Form$ este o mulţime consistentă de formule, atunci există o mulţime $\Gamma \subset Form$ maximal consistentă de formule astfel încât $\Delta \subseteq \Gamma$.

Schiţă şi preliminar al demonstraţiei lemei lui Lindenbaum: Problema pe care demonstraţia teoremei o ridică este de a găsi o procedură prin care să extindem mulţimea iniţială Δ până la o mulţime Γ maximală păstrând consistenţa mulţimii Δ. Ideea procedeului prin care putem realiza această extindere este să alcătuim un şir l = $<\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n,... >$ cu toate formulele $\varphi \in Form$ şi, pornind de la mulţimea Δ, să considerăm, pe rând, fiecare formulă din şi, dacă este consistentă cu formulele mulţimii Δ. Dacă, de pildă, prima formulă din şirul l, adică φ_1, este consistentă cu formulele mulţimii iniţiale Δ, atunci formăm o mulţime[34] Γ_1 din reuniunea mulţimii Δ cu mulţimea $\{\varphi_1\}$. Dacă, în schimb, φ_1 nu este consistentă cu Δ, atunci păstrăm mulţimea Δ şi o redenumim Γ_1.

Generalizând, subscriptul $n+1$ al unei mulţimi Γ_{n+1} ne informează că mulţimea indexată cu acest subscript este fie reuniunea dintre mulţimea Γ_n şi a $n+1$ – a formulă din şirul l, în cazul în care adăugarea acestei formule nu determină inconsistenţa mulţimii Γ_n, fie mulţimea Γ_n, în cazul în care reuniunea dintre mulţimea Γ_n şi a $n+1$ – a formulă din şirul l este inconsistentă. Această verificare a consistenţei se va face etapizat, pentru fiecare formulă în parte din şirul l şi va defini un şir[35] de mulţimi $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n, ...$ indexate corespunzător etapei de verificare. Dar, pentru a realiza acest şir de mulţimi, trebuie să producem şirul l, ceea ce se reduce la a identifica o modalitate de enumerare a tuturor formulelor calculului propoziţional, prin urmare, primul pas în demonstraţia *lemei lui Lindenbaum* constă în a produce o enumerare a formulelor calculului propoziţional. Acest lucru se poate realiza astfel:

1) construim o funcţie $f: A \to 2\mathbb{N}+1$, definită pe alfabetul A al calculului propoziţional şi cu valori în mulţimea numerelor impare, de pildă:

A	$\to$	$\neg$	p_1	p_2....
$f(A)$	1	3	5	7....

[34] Pentru a ţine o evidenţă strictă a elementelor care compun această mulţime şi a o diferenţia de toate celelalte am indexat-o cu subscriptul $_1$, de unde notaţia mulţimea Γ_1.

[35] De fapt o ierarhie, după cum vom demonstra în *lema 2.16*.

2) definim o funcţie h: *Form* $\rightarrow \mathbb{N}$, de pe mulţimea formulelor pe mulţimea numerelor naturale astfel:

$$h(\varphi) = \begin{cases} 2^{f(\varphi)}, \text{dacă } \varphi \text{ este o formulă atomică} \\ 2^{h(\psi)} \times 3, \text{dacă } \varphi \text{ este de forma } (\neg\psi) \\ 2^{h(\psi)} \times 3^{h(\chi)} \times 5, \text{dacă } \varphi \text{ este de forma } (\psi \rightarrow \chi) \end{cases}$$

O astfel de funcţie h are două caracteristici importante pentru consideraţiile de faţă: în primul rând este injectivă iar în al doilea rând permite citirea unică a formulei corespunzătoare unui astfel de număr[36]. Cu această asignare injectivă de numere naturale tuturor formulelor $\varphi \in$ *Form* putem să enumerăm în ordinea crescătoare a numărului $h(\varphi)$, toate formulele $\varphi \in$ *Form* într-un şir de de tipul:

$$l = <\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ... >$$

Şirul pe care îl o obţinem în acest mod este suficient pentru cerinţele pe care demonstraţia *lemei lui Lindenbaum* le presupune.

Acum putem să definim recursiv şirul unor mulţimi Γ_i, $i \in \mathbb{N}$, care să conţină mulţimea iniţială Δ şi să-i păstreze consistenţa.

Definiţie 2.19: Fie φ_{n+1}, a $n + 1$ formulă din lista l. În aceste condiţii, definim:

$$\Gamma_0 = \Delta$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\}, \text{dacă } \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ este consistentă} \\ \\ \Gamma_n, \text{dacă } \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ este inconsistentă} \end{cases}$$

şi Γ' ca reuniunea tuturor acestor mulţimi: $\Gamma' = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup ...$

Pentru a demonstra că Γ' este o mulţime maximal consistentă să demonstrăm, în prealabil, că:

Lema 2.16: Pentru orice mulţimi Γ_i şi Γ_j, $i, j \in \mathbb{N}$, astfel încât $i \leq j$, $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$.

Demonstraţie a) Dacă $i = j$, atunci $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ este un fapt al teoriei mulţimilor [$x \subseteq x$]

b) Dacă $i < j$, vom demonstra prin inducţie că $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$.

Cazul de bază: $i = 0$ şi $j = 1$. Ceea trebuie să arătăm, în acest caz, este că $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1$. Din *definiţia 2.19* ştim că 1) $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{\varphi_1\}$, dacă $\Gamma_0 \cup \{\varphi_1\}$ este consistentă, sau 2)

[36] Un astfel de număr, care permite reconstrucţia formulei căreia i-a fost atribuit, se numeşte *numărul Gödel* asociat formulei.

$\Gamma_1 = \Gamma_0$, dacă $\Gamma_0 \cup \{\varphi_1\}$ este inconsistentă. În cazul 1) $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1$, conform unui fapt elementar din teoria mulţimilor [$x \subseteq x \cup y$], iar în cazul 2) $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1$ pentru că $\Gamma_1 = \Gamma_0$.

Pasul inductiv: să arătăm că pentru orice $j < n$, j, $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_j \subseteq \Gamma_n$. Presupunem că pentru orice $i < j < n$, $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ [*ipoteza inducţiei*]. Acum, fie (I) $j = n\text{-}1$, fie (II) $j < n\text{-}1$. Să le considerăm pe rând. (I) $j = n\text{-}1$. Conform *definiţiei 2.19*, ştim că 1) $\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \cup \{\varphi_n\}$, dacă $\Gamma_{n-1} \cup \{\varphi_n\}$ este consistentă, sau 2) $\Gamma_n = \Gamma_{n-1}$, dacă $\Gamma_{n-1} \cup \{\varphi_n\}$ este inconsistentă. Din ambele cazuri rezultă că 3) $\Gamma_{n-1} \subseteq \Gamma_n$ [justificare e aceeaşi cu cea oferită pentru cazul de bază], aşadar $\Gamma_j \subseteq \Gamma_n$. (II) $j < n\text{-}1$. Din *ipoteza inducţiei*, rezultă că pentru orice $j < n\text{-}1$, 4) $\Gamma_j \subseteq \Gamma_{n-1}$ Din 3) şi tranzitivitatea relaţiei de incluziune $\subseteq$ rezultă că $\Gamma_j \subseteq \Gamma_n$. Din (I) şi (II) rezultă demonstraţia pasului inductiv.

Demonstraţia lemei lui Lindenbaum

Demonstraţia se va face în două etape: întâi vom demonstra că a) *Γ' este consistentă* iar apoi că b) *Γ' este maximal consistentă*.

Pentru a demonstra că a) *Γ' este consistentă*, să demonstrăm că fiecare $\Gamma_i \subseteq \Gamma'$ este consistentă. În acest scop, vom folosi inducţia pe mulţimea Γ'

Cazul de bază:

Din presupunerea că Δ este consistentă, rezultă că Γ_0 este consistentă [$\Gamma_0 = \Delta$].

Pasul inductiv:

Să demonstrăm că din presupunerea că Γ_n este consistentă [*ipoteza inducţiei*] rezultă că Γ_{n+1} este consistentă.

Din *definiţia 2.19* ştim că 1) $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\}$, dacă $\Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\}$ este consistentă, prin urmare, în acest caz, Γ_{n+1} este consistentă în virtutea definiţiei, sau 2) $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$, dacă reuniunea $\Gamma_n \cup \{\varphi_{n+1}\}$ este inconsistentă, în acest caz Γ_{n+1} fiind consistentă în virtutea *ipotezei inducţiei*. Din 1) şi 2) rezultă că Γ_{n+1} este consistentă.

Să recapitulăm: ceea ce vrem să demonstrăm este că mulţimea Γ' este maximal consistentă şi include mulţimea Δ. Ceea ce am stabilit până acum este că fiecare $\Gamma_i \subseteq \Gamma'$ este consistentă. În continuare, vom stabili că, în condiţiile în care fiecare Γ_i este consistentă, Γ' este consistentă. Să presupunem, prin *reductio*, că Γ' este inconsistentă. Atunci, conform *lemei echivalenţei definiţiilor*, există o formulă $\varphi \in Form$ astfel încât (1) $\Gamma' \vdash \varphi$ şi (2) $\Gamma' \vdash \neg\varphi$. Din (1) şi (2), conform *lemei compactităţii sintactice*, rezultă că există două mulţimi finite Δ_1 şi Δ_2 astfel încât $\Delta_1 \vdash \varphi$ şi $\Delta_2 \vdash \neg\varphi$, $\Delta_1 \subset \Gamma'$ şi $\Delta_2 \subset \Gamma'$.

Acum, dat fiind că cele două mulţimi Δ_1 şi Δ_2 sunt finite, putem ordona crescător formulele din aceste mulţimi în funcţie de indexul acestora din şirul *l*. Fie $\Delta' = \Delta_1 \cup \Delta_2 = \{\varphi_i/\varphi_i \in \Delta_1$ sau $\varphi_i \in \Delta_2\} \subset \Gamma'$ şi $I = \{i/i$ este indexul unei formule $\varphi_i \in \Delta'\}$. Conform *definiţiei 2.19*, singurele modalităţi prin care o formulă φ_i poate să aparţină mulţimii Γ' sunt fie pentru că $\varphi_i \in \Delta$ $(=\Gamma_0)$, fie pentru că $\varphi_i \in \Gamma_i$. *Lema 2.16*, însă, ne asigură că $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_i$, aşadar, cu certitudine, $\varphi_i \in \Gamma_i$, pentru orice $i \in I$. Să presupunem, fără a pierde din generalitatea demonstraţiei, că indexul maxim din I este n. Din $\varphi_i \in \Gamma_i$, pentru orice $i \in I$, rezultă că $\varphi_n \in \Gamma_n$. Din *lema 2.16* rezultă că $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$, pentru orice $i \leq n$, iar cum n este cel mai mare index din I rezultă că $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ pentru orice $i \in I$. Din $\varphi_i \in \Gamma_i$ şi $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$, pentru orice $i \in I$, rezultă că $\Delta' \subseteq \Gamma_n$, ceea ce înseamnă că (3) $\Gamma_n \vdash \varphi$ şi (4) $\Gamma_n \vdash \neg\varphi$, adică Γ_n este inconsistentă, ceea ce contrazice faptul că fiecare $\Gamma_i \subseteq \Gamma'$ este consistentă.

b) *Γ' este maximal consistentă.*

Să presupunem, prin *reductio*, că Γ' nu este maximal consistentă. Atunci, există o formulă $\varphi \in Form$, astfel încât $\varphi \notin \Gamma'$, dar totuşi $\Gamma' \cup \{\varphi\}$ este consistentă. Pentru că $\varphi \in Form$, φ trebuie să apară în şirul *l* şi, prin urmare, este indexată cu un anumit număr care îi determină poziţia în şir. Să presupunem, fără a pierde din generalitatea argumentului, că formula φ este a n-a formulă din şirul *l*, prin urmare, că $\varphi = \varphi_n$. Acum, din $\varphi \notin \Gamma'$, rezultă că $\varphi \notin \Gamma_n$ [pentru că $\Gamma_n \subseteq \Gamma'$], de unde rezultă, conform *definiţiei 2.19*, că $\Gamma_{n-1} \cup \{\varphi_n\}$ este inconsistentă. Dacă $\Gamma_{n-1} \cup \{\varphi_n\}$ este inconsistentă, atunci, conform *suficienţei lemei 2.14*, $\Gamma_{n-1} \vdash (\neg\varphi_n)$. Dar $\Gamma_{n-1} \subseteq \Gamma'$ de unde rezultă că $\Gamma' \vdash (\neg\varphi_n)$, de unde, conform *necesităţii lemei 2.14* rezultă că $\Gamma' \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă, ceea ce contrazice asumpţia că există o formulă $\varphi \in Form$, astfel încât $\varphi \notin \Gamma'$, dar totuşi $\Gamma' \cup \{\varphi\}$ este consistentă.

Proprietăţi ale mulţimilor maximal consistente

Mulţimile maximal consistente anumite proprietăţi care facilitează construcţia unui model semantic asociat acestor mulţimi. Acest proprietăţi sunt sumarizate în lemele următoare.

Lema 2.17: Pentru orice formulă $\varphi \in Form$ şi orice mulţime maximal consistentă Γ', fie[37] $\varphi \in \Gamma'$, fie $(\neg\varphi) \in \Gamma'$.

[37] În acest context, 'fie' are o interpretare exclusivă.

Demonstraţie: să presupunem că Γ' este o mulţime maximal consistentă. Din cerinţa consistenţei şi *lema echivalenţei definiţiilor* reiese că nu se poate ca $\varphi \in \Gamma'$ şi $\neg\varphi \in \Gamma'$. Să presupunem că $\varphi \notin \Gamma'$şi $\neg\varphi \notin \Gamma'$. În acest caz, conform *definiţiei 2.18*, atât $\Gamma' \cup \{\varphi\}$ cât şi $\Gamma' \cup \{\neg\varphi\}$ sunt inconsistente, de unde deducem, conform *suficienţei lemei 2.14* că (1) $\Gamma' \vdash (\neg\varphi)$ şi (2) $\Gamma' \vdash \varphi$. Din (1) şi (2) rezultă că Γ' este inconsistentă, aşadar ambele formule nu pot aparţine mulţimii Γ' [altfel s-ar distruge consistenţa mulţimii Γ'] dar nici nu pot fi în afara mulţimii Γ'[după cum am arătat în ultima demonstraţie]. Prin urmare, fie $\varphi \in \Gamma'$, fie $\neg\varphi \in \Gamma'$.

Lema 2.18: Pentru orice formulă $\varphi \in$ *Form* şi orice mulţime maximal consistentă Γ', dacă $\Gamma' \vdash \varphi$, atunci $\varphi \in \Gamma'$ [spunem, în acest caz, că Γ' este închisă în raport cu relaţia de deductibilitate].

Demonstraţie [prin *reductio*]: presupunem că Γ' este maximal consistentă, $\Gamma' \vdash \varphi$ dar totuşi $\varphi \notin \Gamma'$. Dacă $\varphi \notin \Gamma'$, atunci conform *lemei 2.17*, $(\neg\varphi) \in \Gamma'$, de unde rezultă că $\Gamma' \vdash (\neg\varphi)$, aşadar Γ' este inconsistentă. Prin urmare, dacă $\Gamma' \vdash \varphi$, atunci $\varphi \in \Gamma'$.

Lema 2.19: Fie Γ' o mulţime maximal consistentă. În aceste condiţii, $(\varphi \to \psi) \in \Gamma'$ dacă şi numai dacă fie $\varphi \notin \Gamma'$, fie $\psi \in \Gamma'$.

Demonstraţie: **Suficienţa** [prin *reductio*]: presupunem că Γ' este o mulţime maximal consistentă, $(\varphi \to \psi) \in \Gamma'$ şi $\varphi \in \Gamma'$, $\psi \notin \Gamma'$. În această situaţie:
1. $\Gamma' \vdash (\varphi \to \psi)$ [din presupunerea că $(\varphi \to \psi) \in \Gamma'$]
2. $\Gamma' \vdash \varphi$ [din presupunerea că $\varphi \in \Gamma$]
3. $\Gamma' \vdash \psi$ [1,2 *mp*]
4. $\Gamma' \vdash (\neg\psi)$ [din $\psi \notin \Gamma'$ şi *lema 2.17* rezultă că $(\neg\psi) \in \Gamma'$, aşadar $\Gamma' \vdash (\neg\psi)$]

Din 3. şi 4 rezultă că Γ' este inconsistentă. Prin urmare, dacă $(\varphi \to \psi) \in \Gamma'$, atunci fie $\varphi \notin \Gamma'$, fie $\psi \in \Gamma'$.

Necesitatea: presupunem că Γ' este o mulţime maximal consistentă şi (I) $\varphi \notin \Gamma'$, (II) $\psi \in \Gamma'$. Vom demonstra că din ambele cazuri rezultă $\Gamma' \vdash (\varphi \to \psi)$. Să considerăm, aşadar, cele două cazuri:

Cazul (I), $\varphi \notin \Gamma'$. Conform *lemei 2.17* $(\neg\varphi) \in \Gamma'$, aşadar:
1. $\Gamma' \vdash (\neg\varphi)$ [$(\neg\varphi) \in \Gamma'$]
2. $\Gamma' \vdash ((\neg\varphi) \to (\varphi \to \psi))$ [$\mathbf{T_3}$ şi THIN]
3. $\Gamma' \vdash (\varphi \to \psi)$ [1., 2. *mp*]

Cazul (II), $\psi\in\Gamma$'. În acest caz,

4. $\Gamma' \vdash \psi$ [$\psi\in\Gamma'$]
5. $\Gamma' \vdash (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$ [**T₄** şi THIN]
6. $\Gamma' \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ [4., 5. *mp*]

După cum se poate observa, din ambele cazuri rezultă $\Gamma' \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$.

Cu aceste rezultate la îndemână putem enunţa şi demonstra principalul instrument folosit în demonstrarea completitudinii calculului propoziţional:

Lema 2.20: *Lema existenţei unui model*: Dacă $\Gamma \subset$ *Form* este o mulţime consistentă de formule, atunci Γ are un model.

Demonstraţie: fie $\Gamma \subset$ *Form* o mulţime consistentă de formule. Acum, conform *lemei lui Lindenbaum*, există o mulţime maximal consistentă de formule Γ' astfel încât $\Gamma \subseteq \Gamma'$.

Definim o funcţie de evaluare v pe mulţimea *Var* astfel:

$$v: Var \rightarrow \{0, 1\},$$

$$v(p_i) = \begin{cases} 1, \text{ ddacă } p_i \in \Gamma' \\ \\ 0, \text{ ddacă } p_i \notin \Gamma' \end{cases}$$

În aceste condiţii, vrem să arătăm că următoarea echivalenţă are loc:

$$(E)\ i(\varphi) = 1 \text{ dacă şi numai dacă}^{38}\ \varphi\in\Gamma',$$

unde i, i: *Form* $\rightarrow \{0, 1\}$, este extensia funcţiei v definită mai sus.

Pentru a demonstra (E) vom folosi prin inducţia pe complexitatea lui φ:

Cazul de bază: $c(\varphi) = 0$. În acest caz, $\varphi = p_i$, $p_i\in Var$. Din definiţia evaluării v şi a interpretării i rezultă $i(\varphi) = v(p_i) = 1$ ddacă $\varphi = p_i\in\Gamma'$.

Pasul inductiv: să presupunem că $i(\varphi) = 1$ ddacă $\varphi\in\Gamma'$, pentru orice $\varphi\in Form$, $c(\varphi) < n$ [*ipoteza inducţiei*] şi să arătăm că echivalenţa de mai sus se păstrează şi pentru formulele $\varphi\in\Gamma'$ astfel încât $c(\varphi) = n$. *Corolarul 2.1* ne asigură că formulele calculului propoziţional dezvoltat de noi nu pot avea decât următoarele forme: (I) $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ sau (II) $\varphi = (\neg\psi)$. Vom trata cazurile separat.

Cazul (I): să presupunem că $\varphi = (\neg\psi)$ şi $c(\varphi) = n$ şi să demonstrăm că $i(\varphi) = i(\neg\psi) = 1$ ddacă $(\neg\psi)\in\Gamma'$.

[38] în continuare, precurtat *ddacă*.

Suficienţa: presupunem că $i(\varphi) = i(\neg\psi) = 1$. Atunci, conform definiţiei interpretării i, $i(\psi) = 0$. Dar $c(\psi) < n$, prin urmare *ipoteza inducţiei* se aplică formulei ψ. Prin contrapoziţie din *necesitatea ipotezei inducţiei* [$i(\psi) = 1$ ddacă $\psi\in \Gamma$'], rezultă că $\psi\notin \Gamma$'. Din *lema 2.17* rezultă că $(\neg\psi)\in \Gamma$'.

Necesitatea: presupunem că $\varphi = (\neg\psi)\in \Gamma$. Din *lema 2.17* rezultă că $\psi\notin \Gamma$'. Dar $c(\psi) < n$, prin urmare *ipoteza inducţiei* se aplică formulei ψ. Prin contrapoziţie din *suficienţa ipotezei inducţiei* [$i(\psi) = 1$ ddacă $\psi\in \Gamma$'] rezultă că $i(\psi) = 0$. Conform definiţiei interpretării i, $i(\neg\psi) = i(\varphi) = 1$.

Cazul (II): să presupunem că $\varphi = (\psi \to \chi)$, $c(\varphi) = n$, $c(\psi) < n$, $c(\chi) < n$ şi să demonstrăm că $i(\psi \to \chi) = 1$ ddacă $(\psi \to \chi)\in \Gamma$'

Suficienţa: presupunem că $i(\varphi) = i(\psi \to \chi) = 1$. Atunci, conform definiţiei interpretării i, nu este cazul că $i(\psi) = 1$ şi $i(\chi) = 0$ ceea ce revine la a aserta că sau $i(\psi) = 0$ sau $i(\chi) = 1$. Să considerăm pe rând, cele două cazuri, respectiv, $i(\psi) = 0$ şi $i(\chi) = 1$. Dividem demonstraţia corespunzător acestor subcazuri în:

Subcazul (IIa): $i(\psi) = 0$. Cum $c(\psi) < n$, *ipoteza inducţiei* se aplică formulei ψ, iar prin contrapoziţie din *necesitatea ipotezei inducţiei* rezultă $\psi\notin \Gamma$'. Din *lema 2.19* rezultă că $(\psi \to \chi)\in \Gamma$'.

Subcazul (IIb): $i(\chi) = 1$. Cum $c(\chi) < n$, *ipoteza inducţiei* se aplică formulei χ iar din *ipotezei inducţiei* rezultă $\chi\in \Gamma$'. Din *lema 2.19* rezultă că $(\psi \to \chi)\in \Gamma$'.

Necesitatea: presupunem că $(\psi \to \chi)\in \Gamma$'. Din *lema 2.19* rezultă că fie $\psi\notin \Gamma$', fie $\chi\in \Gamma$'. Vom considera pe rând, cele două cazuri, respectiv, $i(\psi) = 0$ şi $i(\chi) = 1$ şi vom divide demonstraţia corespunzător acestor subcazuri:

Subcazul (IIc): $\psi\notin \Gamma$'. Pentru că $c(\psi) < n$, *ipoteza inducţiei* se aplică formulei ψ rezultând, prin contrapoziţie din *necesitatea ipotezei inducţiei*, că $i(\psi) = 0$, de unde, mai departe, conform definiţiei interpretării i, rezultă că $i(\psi \to \chi) = 1$.

Subcazul (IId): $\chi\in \Gamma$'. Pentru că $c(\chi) < n$, *ipoteza inducţiei* se aplică formulei χ rezultând că $i(\chi) = 1$, de unde, mai departe, conform definiţiei interpretării i, rezultă că $i(\psi \to \chi) = 1$.

Ceea ce am demonstrat până acum este că pentru orice formulă $\varphi\in \Gamma$' există o interpretare i astfel încât:

$$i(\varphi) = 1 \text{ ddacă } \varphi\in \Gamma'.$$

Din definiţia a ceea ce este un model, rezultă, evident, că Γ' are un model [interpretarea *i*]. Dar cum $\Gamma \subseteq \Gamma'$, rezultă că $i(\varphi) = 1$ pentru orice $\varphi \in \Gamma$, adică Γ are un model. Cu aceasta, demonstraţia existenţei unui model este încheiată.

Pentru a uşura demonstraţia teoremei de completitudine a calculului propoziţional să stabilim următorul rezultat:

Lema 2.21: Fie $\varphi \in Form$, $\Gamma \subset Form$. Dacă $\Gamma \models \varphi$, atunci $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu are nici un model, simbolic $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \not\models$.

Demonstraţie [prin *reductio*]: Presupunem că $\Gamma \models \varphi$ şi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ are un model. Conform definiţiei *modelului* există o evaluare *v* astfel încât $i(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = 1$ adică există o evaluare *v* astfel încât $i(\Gamma) = i(\neg\varphi) = 1$. Dacă $i(\neg\varphi) = 1$, atunci conform definiţiei interpretării *i*, $i(\varphi) = 0$, prin urmare există o evaluare *v* astfel încât $i(\Gamma) =1$ şi $i(\varphi) = 0$, ceea ce contrazice asumpţia că $\Gamma \models \varphi$.

Teorema 2.7: *Teorema de completitudine a calculului propoziţional*: Dacă $\Gamma \models \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstraţie: Să presupunem că $\Gamma \models \varphi$. Conform *lemei 2.21*, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu are nici un model. Dar dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu are nici un model, atunci, prin contrapoziţie din *lema existenţei unui model*, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă sintactic. Dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă sintactic, atunci, prin *lema 2.13*, $\Gamma \vdash \varphi$.

În continuare vom demonstra *teorema de compactitate* folosindu-ne de teorema de completitudine şi corectitudine plus următoarea lemă:

Lema 2.22: Dacă fiecare submulţime finită Δ a unei mulţimii Γ este consistentă, atunci Γ este consistentă.

Demonstraţie [prin *contrapoziţie*]: Presupunem că Γ este inconsistentă. În acest caz, conform *lemei echivalenţei definiţiilor*, $\Gamma \vdash \perp$ Conform lemei de *compactitate sintactică*, există o submulţime finită $\Delta_i \subseteq \Gamma$ astfel încât $\Delta_i \vdash \perp$.

Teorema 2.8: *Teorema de compactitate*: O mulţime Γ are un model ddacă toate submulţimile finite $\Delta \subseteq \Gamma$ ale acesteia au un model.

Demonstraţie: **Suficienţa**: dacă Γ are un model, atunci, evident, fiecare submulţime $\Delta \subseteq \Gamma$ are un model. [este suficient să considerăm acea evaluare *v* care se extinde la o interpretare *i* care face toate formulele lui Γ adevărate]

Necesitatea [prin *reductio*]: să presupunem că fiecare submulţime finită $\Delta \subseteq \Gamma$ are un model dar că Γ nu are nici un model. Atunci, prin contrapusa *lemei existenţei unui model*, Γ este inconsistentă. Dacă Γ este inconsistentă, atunci, prin contrapusa *lemei 2.22*, există o submulţime finită $\Delta \subseteq \Gamma$, astfel încât Δ este inconsistentă. Dacă Δ este inconsistentă, atunci prin contrapusa *lemei existenţei unui model* Δ nu are un model. Contradicţie.

Următoarea teoremă este echivalentă cu *teorema de compactitate*:

Teorema 2.9: $\Gamma \models \varphi$ ddacă există o submulţime finită $\Delta \subseteq \Gamma$ astfel încât $\Delta \models \varphi$.

Demonstraţie: **Suficienţa**: Dacă $\Gamma \models \varphi$, atunci, conform *teoremei de completitudine*, $\Gamma \vdash \varphi$. Dacă $\Gamma \vdash \varphi$ atunci, conform *lemei compactităţii sintactice* există o submulţime finită $\Delta \subseteq \Gamma$ astfel încât $\Delta \vdash \varphi$. Aplicând teorema de corectitudine obţinem $\Delta \models \varphi$. Prin urmare $\Delta \models \varphi$.

Necesitatea [prin *reductio*]: Presupunem că există o submulţime finită $\Delta \subseteq \Gamma$, astfel încât $\Delta \models \varphi$, dar, totuşi, $\Gamma \not\models \varphi$. Fie *v* evaluarea care se extinde la interpretarea $i(\Gamma) = 1$ şi $i(\varphi) = 0$. Pentru că $i(\Gamma) = 1$ şi $\Delta \subseteq \Gamma$ avem $i(\Delta) = 1$. Dar în aceste condiţii avem $i(\Delta) = 1$ şi $i(\varphi) = 0$, adică $\Delta \not\models \varphi$, ceea ce contrazice presupunerea noastră.

Lăsăm ca exerciţiu al înţelegerii conceptelor de completitudine, corectitudine şi compactitate, demonstraţia echivalenţei *teoremei 2.9* cu *teorema de compactitate*.

3 Logica de ordinul I

PRELIMINAR

Necesitatea introducerii logicii de ordinul întâi se poate justifica, de pildă, prin indicarea unor raţionamente a căror validitate o putem sesiza intuitiv, dar nu o putem demonstra în calculul propoziţiilor. De pildă, cel mai celebru raţionament silogistic,

Toţi oamenii sunt muritori
<u>Socrate este om</u>
Socrate este muritor,

deşi este corect (atât intuitiv cât, vom vedea, şi formal), totuşi, în modelarea propoziţională, apare ca fiind nevalid. Mai precis, din punctul de vedere al logicii propoziţiilor, raţionamentul este compus din trei propoziţii atomare diferite, iar forma sa, în calculul propoziţional, este: $\{p_1, p_2\} \vdash p_3$, unde
p_1: Toţi oamenii sunt muritori.
p_2: Socrate este om.
p_3: Socrate este muritor.
Nevaliditatea raţionamentului se poate proba considerând evaluarea v în care: $v(p_1) = v(p_2) = 1$, $v(p_3) = 0$. În această evaluare premisele sunt adevărate, iar concluzia este falsă, aşadar $\{p_0, p_1\} \nvDash p_2$ iar conform contrapusei *teoremei de corectitudine*, $\{p_0, p_1\} \nvdash p_2$, adică raţionamentul este nevalid.

În acest context, să analizăm relevanţa calculului propoziţional pentru logica de ordinul I. Putem descrie mai acurat utilitatea calculului propoziţional faţă de logica de ordinul I în următorul mod: dacă am stabilit că φ este o *consecinţă tautologică* a mulţimii de asumpţii Γ (Γ $\vDash$ φ) atunci φ va fi o *consecinţă semantică* a mulţimii de asumpţii Γ şi în logica de ordinul I. Dar dacă Γ $\nvDash$ φ în calculul propoziţional? În acest caz, după cum am arătat în exemplul de mai sus, nu putem afirmă că φ nu este o *consecinţă semantică* a lui Γ ci doar că φ nu este o *consecinţă tautologică* a lui Γ. Vom vedea că φ este o *consecinţă semantică* a lui Γ într-un sens mai larg, în logica de ordinul I. Cu alte cuvinte, rezultatele obţinute în calculul propoziţiilor rămân un bun câştigat. O schemă de raţionament validă în logica propoziţiilor se adaugă, ca un bun câştigat, în lista schemelor valide de raţionament ale logicii de ordinul I. Problema pe care o ridică exemplul de mai sus este că această listă de scheme valide de raţionament nu este epuizată de tehnicile de evaluare din logica propoziţiilor, adică există mai multe raţionamente valide decât poate demonstra logica propoziţiilor. Pentru a surprinde aceste raţionamente valide, avem nevoie, evident, de o extindere a calculului propoziţional. Cea mai 'naturală' şi la îndemână astfel de extensie este logica de ordinul I (LOI).

SINTAXA LIMBAJELOR DE ORDINUL I

Înainte de a prezenta un limbaj de ordinul I trebuie să subliniem o asumpţie fundamentală pe care este construit acest limbaj: aceea că enunţurile cele mai simple sunt de forma următoare:

Un anumit obiect o are proprietatea P şi

Două sau mai multe obiecte se află în relaţia R

Iată cum motivează Dirk van Dalen această asumpţie în cazul limbajelor matematice:

> Experience has taught us that the basic mathematical statements are of the form "*a* has the property P" or "*a* and *b* are in the relation *R*", etc. Examples are: "*n* is even", "*f* is differentiable", "3 = 5", "7 < 12", "*B* is between *A* and *C*".[1]

Aceeaşi idee apare şi în dialogul *Sofist*-ul[2], unde Platon analizează enunţurile simple sau elementare ca un compus dintre un substantiv care denotă un individ sau o clasă de indivizi şi un verb care denotă o acţiune sau o proprietate a acestora.

În consecinţă, alfabetul limbajelor de ordinul I va conţine simboluri pentru constante individuale şi simboluri pentru predicate. Intuitiv, constantele individuale denotă indivizi sau obiecte, predicatele denotă proprietăţi ale indivizilor sau

[1] Dirk van Dalen [2008], *Logic and Structure*, Berlin, New York: Springer Verlag.
[2] Platon [2004], 'Sofistul' în *Opere complete* vol. IV, Bucureşti: Humanitas, pp. 83 – 87.

obiectelor. La această listă de simboluri vom adăuga şi simbolurile funcţionale, amânând discuţia privind justificarea şi utilitatea acestora. Această listă de simboluri poate fi, în unele cazuri, vidă. Pentru a rezuma, un limbaj de ordinul I conţine:

I.. *Signatura* (σ)

a) O mulţime *C* de simboluri pentru constante individuale: $C = \{c_n: n \in \mathbb{N}^*\}$

b) O mulţime *Pr* de simboluri predicaţionale: $Pr = \{P_i^n : n, i \in \mathbb{N}^*\}$

c) O mulţime *Fţ* de simboluri funcţionale: $Fţ = \{f_i^n : n, i \in \mathbb{N}^*\}$

Specificarea limbajelor de ordinul I se va face, în continuare, prin precizarea signaturii acstuia, considerând fixate celelalte componente. În acest sens, să remarcăm că specificitatea unei teorii de ordinul I este determinată de signatura acesteia. Componenetele fixe şi indispensabile ale limbajului de ordinul I pe care îl vom construi în continuare sunt *simbolurile logice* şi *simbolurile auxiliare*:

II. *Simbolurile logice*

d) conectorii propoziţionali: $O = \{\rightarrow, \neg\}$

e) cuantificatorii: $Cuant = \{\forall\}$

f) identitatea[3]: $I = \{=\}$

g) variabilele: $Var = \{x_n: n \in \mathbb{N}^*\}$

Similar calculului propoziţional, vom introduce două simboluri adiţionale folosite la citirea unică a formulelor limbajului.

III. *Simbolurile auxiliare* [semnele de punctuaţie]:

h) *Pc* = {‘(’, ‘)’ }

Trebuie să subliniem că presupunerea subiacentă alegerii acestor mulţimi de simboluri este ca mulţimile să fie disjuncte două câte două. Cu aceste precizări specificăm alfabetul $A = \{\sigma \cup O \cup Cuant \cup I \cup Var \cup Pc\}$ unui limbaj de ordinul I, unde σ poate fi vidă.

Precizări terminologice: 1) Convenim să notăm prin $\mathcal{L}(\sigma)$ limbajul pe care îl vom construi pornind de la alfabetul *A* şi signatura σ, iar, în continuare, vom menţiona

[3] Trebuie să precizăm că unii logicieni consideră că identitatea trebuie plasată în signatura limbajului, însă, în continuare, vom trata identitatea ca pe un un concept care aparţine logicii, aşadar vom încadra simbolul pentru identitate în lista simbolurilor logice.

doar signatura limbajului σ subînţelegând că este vorba de signatura limbajului $\mathcal{L}$, descris mai jos.
2) În cazul în care nu se produce o confuzie terminologică, vom proceda adeseori la următoarele abrevieri: constantele c_1, c_2, ,...c_m vor fi abreviate prin literele a, b, c..., simbolurile predicaţionale P_1^n, ..., P_k^n prin literele P, Q, R, S, F, G etc., simbolurile funcţionale f_1^n, ..., f_k^n prin simbolurile uzuale de funcţii f, g etc. iar variabilele individuale x_1, x_2, ,...x_n prin literele de la sfârşitul alfabetului x, y, z, t, u, ... etc.
Exemple: (1) Signatura aritemticii este, σ_{AR}: $\{0, S, +, \times\}$, unde
a) *Constante individuale*: 0.
b) *Simboluri funcţionale*: S [simbolul pentru funcţia *succesor*], +, ×
c) *Simboluri relaţionale*: Ø
(2) Signatura teoriei mulţimilor în axiomatizarea Zermelo-Fraenkel cu axioma alegerii este σ_{ZFC} : $\{\in\}$, unde
a) *Constante individuale*: Ø
b) *Simboluri funcţionale*: Ø
c) *Simboluri relaţionale*: ∈ [simbolul pentru relaţia de apartenenţă].
(3) Signatura teoriei grupurilor este σ_{GR}: $\{e, \circ, ^{-1}\}$ unde
a) *Constante individuale*: *e* [elementul neutru al structurii]
b) *Simboluri funcţionale*: ∘ [operaţie binară asociativă],$^{-1}$ [operaţie unară – asociază fiecărui element al structurii de grup inversul acestuia]
c) *Simboluri relaţionale*: Ø

Cu ajutorul simbolurilor de mai sus putem opera concatenări şi obţine, în acest mod, cuvinte peste alfabetul A. Dar, după cum am văzut în secţiunea dedicată calculului propoziţiilor, scopul sintaxei unui limbaj formal este să delimiteze mulţimea propoziţiilor cu sens, în acest caz, mulţimea propoziţiilor pasibile de a fi adevărate sau false, de alte construcţii peste acest alfabet. În cazul calculului propoziţional, această specificare se putea face într-un mod direct, dat fiind că în limbaj logicii propoziţiilor nu distingeam structura propoziţională, astfel încât elementele de bază ale construcţiei erau considerate propoziţii. Limbajul logicii de ordinul I, însă, surprinde structura propoziţiilor, iar pentru a defini ce anume este o propoziţie trebuie să specificăm, în prealabil, care sunt elementele componente ale unei propoziţii. 'Cărămizile' din care este alcătuită o propoziţie sunt termenii, prin urmare, primul pas pe care trebuie să-l facem pentru a delimita mulţimea propoziţiilor este să specificăm definiţional care sunt termenii limbajului $\mathcal{L}(\sigma)$.

Simplificând, putem spune că un termen este o expresie folosită pentru a numi ceva. În general se disting trei modalităţi prin care termenii realizează această funcţie de numire: 1) prin intermediul *constantelor individuale* se atribuie unui *obiect determinat* un nume determinat care va rămâne fixat referenţial de acel obiect [în limbajul natural numele proprii sunt echivalentul constantelor individuale], 2) prin intermediul *variabilelor* se atribuie un nume temporar unui *obiect nespecificat* [echivalentul variabilelor, în limbajul natural, este reprezentat de modul de folosire al substantivelor nearticulate], şi, în sfârşit, 3) prin intermediul *funcţiilor* aplicate termenilor atribuim un nume 'complex' – cu proprietatea că indică modul de determinare a referinţei sale – unui obiect specificat sau nu [exemple, în limbajul natural, în acest sens sunt construcţiile de tipul: *fiul lui George*; *tatăl lui Petre*, unde expresiile *fiul*, *tatăl* se comportă ca funcţii aplicate unor constante individuale [*George*, *Petre*].

Următorul pas în elaborarea limbajului nostru constă în specificarea modului în care se agregă termenii pentru a forma propoziţii. Totuşi, o cale mai eficientă de a preciza ce anume constituie o propoziţie în $\mathcal{L}(\sigma)$ este să definim mulţimea formulelor limbajului $\mathcal{L}(\sigma)$, iar din această mulţime să delimităm, ulterior, mulţimea propoziţiilor. Observaţia care ne determină să procedăm în acest mod este că formulele îndeplinesc o funcţie dublă: pe de-o parte ele exprimă propoziţii, pe de altă parte ele exprimă relaţii şi proprietăţi complexe definibile în $\mathcal{L}$.

În acord cu cele expuse în paragrafele precedente, pentru a descrie sintaxa limbajului $\mathcal{L}(\sigma)$ în termenii sistemelor de generare trebuie să disjungem şi să demonstrăm libera generare a două sisteme: al termenilor şi al formulelor. Vom specifica aceste sisteme fără însă a demonstra proprietatea de liber-generare a acestora[4] [cititorul, însă, este încurajat să încerce să construiască demonstraţii ale liber generării sistemului termenilor şi formulelor] iar în prezentarea unui limbaj de ordinul I vom opta pentru definirea termenilor şi formulelor într-un mod 'clasic',

[4] După cum subliniam şi în prefaţa acestei lucrări, miza demersului nostru este prezentarea unei abordări matematice actuale a logicii într-un mod cât mai accesibil, dar care să nu prejudicieze rigoarea matematică. În acest sens, înţelegerea modului în care am demonstrat proprietatea de liber generare a sintaxei calculului propoziţiilor este suficientă pentru a înţelege demonstraţia corespunzătoare liber generării termenilor şi formulelor limbajului $\mathcal{L}$; diferenţa dintre cele două demonstraţii nu este de natură conceptuală ci doar de complexitate.

din considerentul simplu de a face cât mai intuitivă sintaxa limbajului $\mathcal{L}$. În fond, descrierea sistemului temenilor şi formulelor în vocabularul sistemelor de generare are ca scop stabilirea liber generării acestora şi, în consecinţă, legitimarea folosirii inducţiei şi recursivităţii pe mulţimea termenilor şi formulelor. Pentru că definiţiile clasice ale mulţimii termenilor şi formulelor limbajului $\mathcal{L}(\sigma)$ sunt echivalente cu cele descrise mai jos, în termenii sistemelor de generare, putem importa rezultatele de liber generare obţinute în acest din urmă caz, ceea ce, mai departe, ne va permite să definim recursiv funcţii şi să folosim demonstraţiile prin inducţie pe aceste mulţimi.

Definiţie 3.1: Fie σ o signatură şi pentru orice $f_i^n \in Fţ$ definim $f_{f_i^n}: A^* \to A^*$, $f_{f_i^n}(t_1, ..., t_n) = f_i^n$ ^(^t_1^...^t_n^). În aceste condiţii, termenii (*Term*) limbajului $\mathcal{L}(\sigma)$ sunt: $Term = G(A^*, C \cup Var, \{f_{f_i^n}$, unde $f_i^n \in Fţ\})$.

Teorema 3.1: Sistemul *Term* este liber generat.

Demonstraţie: După cum subliniam mai sus, demonstraţia nu este conceptual mai dificilă ci doar mai complexă faţă de cea oferită în capitolul anterior pentru calculul propoziţiilor aşa încât îl îndrumăm pe cititor să încerce să demonstreze singur *teorema 3.1* având ca şablon conceptual demonstraţia liber generării sintaxei calculului propoziţional.

Definiţie 3.2: Fie σ o signatură. Definim:

Form_Atom=$\{P_i^n$ ^(^t_1^...^t_n^), $P_i^n \in Pr$, t_i, ... $t_n \in Term\} \cup \{$(^t_i^=^t_j^), $t_i, t_j \in Term\}$.

Fie, acum, funcţiile:

$$f_\neg: A^* \to A^*,$$
$$f_\neg(\varphi) = (\text{^}\neg\text{^}\varphi\text{^}), \text{ unde } \varphi \in A^*$$
$$f_\to: A^* \times A^* \to A^*,$$
$$f_\to(\varphi, \psi) = (\text{^}\varphi\text{^}\to\text{^}\psi\text{^}), \text{ unde } \varphi, \psi \in A^*.$$
şi
$$\text{pentru orice } x \in Var, f_\forall: A^* \to A^*,$$
$$f_\forall(\varphi) = \forall\text{^}x\text{^}(\text{^}\varphi\text{^}) \text{ unde } \varphi \in A^*$$

Definiţie 3.3: Formulele (*Form*) limbajului $\mathcal{L}(\sigma)$ sunt:

$$Form = G(A^*, Form\_atomic, \{f_{\neg}, f_{\rightarrow}, f_{\forall}\})$$

Teorema 3.2: Sistemul *Form* este liber generat.

Lăsăm în seama cititorului demonstraţia *teoremei 3.2* urmând şablonul demonstraţiei liber generării sistemului *Form* din capitolul anterior.

Teorema recursivităţii şi *teoremele 3.1* şi *3.2* ne permit să definim recursiv funcţii pe mulţimea termenilor şi formulelor şi să utilizăm principiul inducţiei pentru a demonstra că termenii sau formulele limbajului au o anumită proprietate.

Principiul inducţiei structurale pe mulţimea formulelor: $\varphi \in Form$ are proprietatea P, dacă:

Cazul de bază: $\varphi \in Form\_atomic$ are proprietatea P

Pasul inductiv:

a) Dacă $\varphi \in Form$ şi φ are proprietatea P, atunci $(\neg\varphi)$ are proprietatea P.

b) Dacă φ şi $\psi \in Form$ au proprietatea P, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ are proprietatea P.

c) Dacă $\varphi \in Form$ are proprietatea P şi x este o variabilă, atunci $\forall x(\varphi)$ are proprietatea P.

Principiul inducţiei structurale pe mulţimea termenilor: $t \in Term$ are proprietatea P, dacă:

Cazul de bază

a) Fiecare $c_i \in C$ are proprietatea P.

b) Fiecare $x_i \in Var$ are proprietatea P.

Pasul inductiv: dacă fiecare $t_i \in Term$ $(1 \leq i \leq n)$ are proprietatea P, atunci $f_i^n\ (t_1 \ldots t_n)$ are proprietatea P.

După cum subliniam mai sus, definiţiile clasice ale mulţimii termenilor şi formulelor $\mathcal{L}(\sigma)$ sunt echivalente cu cele formulate în termenii sistemelor de generare, aşadar, folosirea definiţiilor recursive ale funcţiilor precum şi cele două principii structurale sunt legitime şi în contextul utilizării definiţiilor clasice.

Definiţie 3.4: Fie σ o signatură. Definim mulţimea termenilor (TERM) limbajului $\mathcal{L}(\sigma)$ prin următoarele clauze:

i) Orice constantă individuală este un termen; $C \subseteq$ TERM

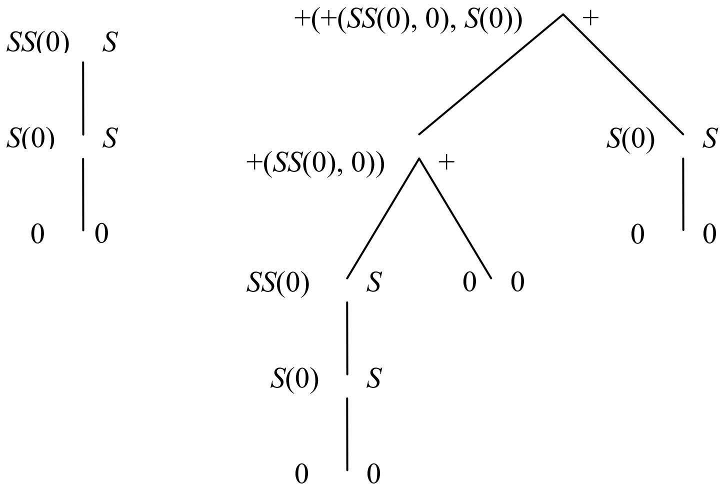
ii) Orice variabilă este un termen; $Var \subseteq$ TERM

iii) Dacă $t_1, ..., t_n \in$ TERM, atunci $f_i^n(t_1 \ldots t_n) \in$ TERM, pentru orice $f_i^n \in F_ț$.

iv) Reprezintă un termen orice şir de simboluri din $\mathcal{L}(\sigma)$ care se obţine efectuând de un număr finit de ori paşii i)-iii).

Exemple: 1) În $\mathcal{L}(\sigma_{AR})$, $SS(0)$, $+(S(0), +(SS(0)), 0)$ sunt termeni. 2) În $\mathcal{L}(\sigma_{GR})$, x^{-1}, $\circ(x, y)$, $\circ(\circ(x, y), x^{-1})$ sunt termeni.

Libera generare a mulţimii termenilor ne sugerează posibilitatea de a-i reprezenta cu ajutorul arborilor de decompoziţie.



Asociem, de pildă, celor doi termeni ai $\mathcal{L}(\sigma_{AR})$, următorii arbori de decompoziţie

Definiţie 3.5: Fie σ o signatură. Definim formulele atomare (FORM_ATOM) ale lui $\mathcal{L}(\sigma)$ prin următoarele clauze:

i) Dacă $t_i, t_j \in$ TERM, atunci $(t_i = t_j) \in$ FORM_ATOM;

ii) Dacă $t_1, ..., t_n \in$ TERM şi $P_i^n \in Pr$, atunci $P_i^n(t_1 \ldots t_n) \in$ FORM_ATOM

iii) Reprezintă o formulă atomară orice şir de simboluri din A^* care se obţine efectuând de un număr finit de ori paşii i)-iii)

Definiţie 3.6: Fie σ o signatură. Definim formulele (FORM) lui $\mathcal{L}(\sigma)$ prin următoarele clauze:

i) Dacă $\varphi \in$ FORM_ATOM, atunci $\varphi \in$ FORM.

ii) Dacă $\varphi, \psi \in$ FORM, atunci $(\varphi \to \psi) \in$ FORM.

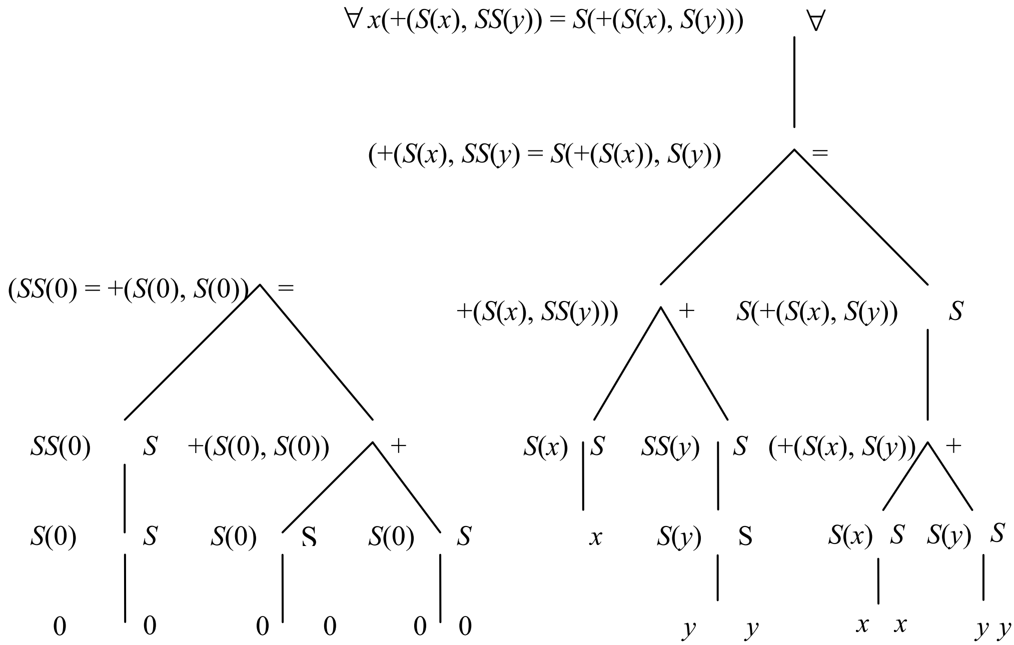
iii) Dacă $\varphi \in$ FORM, atunci $(\neg\varphi) \in$ FORM,

iv) Dacă $\varphi \in$ FORM şi $x \in Var$, atunci $\forall x(\varphi) \in$ FORM.

v) Reprezintă o formulă orice şir de simboluri din $\mathcal{L}(\sigma)$ obţinut prin aplicarea de un număr finit de ori a clauzelor i)-iv).

Exemple: 1) În $\mathcal{L}(\sigma_{AR})$, $(SS(0) = +(S(0), S(0))$; $\forall x(+(S(x), SS(y)) = S(+(S(x), S(y)))$ sunt formule. 2) În $\mathcal{L}(\sigma_{GR})$, $(\circ(x,x^{-1}) = e)$; $\forall x \forall y \forall z\ (\circ(\circ(\ x, y), z) = (\circ(x, \circ(y, z)))$ sunt formule.

Ca în cazul termenilor, putem asocia unei formule un arbore unic de decompoziţie. Mai jos avem ilustraţi arborii de decompoziţie pentru formulele din exemplul 1).



În acest punct este util să stabilim o convenţie privind scrierea formulelor care conţin simboluri predicaţionale, relaţionale şi funcţionale. În acord cu practica matematică, vom nota expresiile matematice relaţionale şi funcţionale consacrate [de tipul $<, >, \leq, \geq$, pentru cele relaţionale şi $+$, $-$, $\times$, $\div$ pentru cele funcţionale] nu înaintea variabilelor ci între variabile, restul expresiilor predicative şi relaţionale fiind notate conform definiţiei formulelor. Formulele exemplului 1) vor fi rescrise, în acest caz, sub forma: $(SS(0) = (S(0) + S(0))$; $\forall x((S(x)+SS(y)) = S((S(x)+S(y)))$

Consecinţele liberei generări a mulţimii termenilor şi formulelor, pe care le precizăm sub forma unor corolare fără, însă, a le demonstra, sunt reprezentate de proprietatea descompunerii unice a fiecărei formule şi termen din $\mathcal{L}(\sigma)$. Pentru a nu încărca excesiv enunţul definiţiilor, lemelor şi teoremelor, acolo unde contextul este clar, vom eluda menţionarea limbajului $\mathcal{L}$.

Corolar 3.1 (*Descompunerea unică a termenilor*): Dacă $t \in$ TERM atunci t poate avea doar una dintre următoarele forme:
(*i*) $t = c_i$, $c_i \in C$
(*ii*) $t = x_i \in Var$
(*iii*) $t = f_i^n\ (t_1 \ldots t_n)$, unde f_i^n este un simbol funcţional n-ar iar $t_i \in$ TERM, $(1 \leq i \leq n)$.

Corolar 3.2 (*Descompunerea unică a formulelor*): Dacă $\varphi \in$ FORM, atunci φ poate avea doar una dintre următoarele forme:
(*i*) $\varphi = (t_i = t_j)$, unde t_i, $t_j \in$ TERM,
(*ii*) $\varphi = P_i^n\ (t_1 \ldots t_n)$, unde $t_i \in$ TERM, $(1 \leq i \leq n)$, iar $P_i^n \in Pr$.
(*iii*) $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde $\psi, \chi \in$ FORM.
(*iv*) $\varphi = (\neg\psi)$, unde $\psi \in$ FORM.
(*v*) $\varphi = \forall x(\psi)$, unde $x \in Var$ şi $\psi \in$ FORM.

Specificarea mulţimii FORM, însă, nu e de ajuns pentru a stabili care formule reprezintă propoziţii. Pentru a delimita clasa acestora trebuie să precizăm, în prealabil, relaţia dintre cuantificatori şi variabile în cadrul unei formule. În acest scop vom defini mulţimea subformulelor unei formule şi a subformulelor imediate ale acesteia.

Definiţie 3.7: Fie $\mathcal{L}(\sigma)$ un limbaj, σ o signatură şi $\varphi \in$ FORM. Subformulele ($SF(\varphi)$) ale formulei φ, $SF(\varphi)$: FORM $\rightarrow \mathbb{P}$(FORM), sunt

i) Dacă $\varphi \in$ FORM_ATOM, atunci $SF(\varphi) = \{\varphi\}$.
ii) Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, $SF(\varphi) = SF\{\psi\} \cup \{\psi\}$.
iii) Dacă $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, atunci $SF(\varphi) = SF\{\psi\} \cup SF\{\chi\} \cup \{\varphi\}$.
iv) Dacă $\varphi = \forall x(\psi)$, atunci $SF(\varphi) = SF\{\psi\} \cup \{\varphi\}$.

Definiţie 3.8: Fie $\mathcal{L}(\sigma)$ un limbaj, σ o signatură şi $\varphi \in$ FORM. Subformulele imediate ($SFI(\varphi)$) ale formulei φ, $SFI(\varphi)$: FORM $\rightarrow \mathbb{P}$(FORM) sunt,

i) Dacă $\varphi \in$ FORM_ATOM, atunci $SFI(\varphi) = \emptyset$.
ii) Dacă $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, atunci $SFI(\varphi) = \{\psi, \chi\}$.
iii) Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, atunci $SFI(\varphi) = \{\psi\}$.
iv) Dacă $\varphi = \forall x(\psi)$, atunci $SFI(\varphi) = \{\psi \cup \chi\}$.

Pentru lizibilitatea următoarelor definiţii subînţelegem prin referinţele la termenii t sau formulele φ exclusiv referinţe la termeni σ-termeni $t \in$ TERM şi formule σ-formule $\varphi \in$ FORM.

Să definim ce sunt ocurenţele variabilelor unui termen t, (OV(t)), şi variabilele libere ale unei formule, (VL(φ)).

Definiţie 3.9: Fie $\mathcal{L}(\sigma)$ un limbaj, σ o signatură. Ocurenţele variabilelor unui σ-termen t, (OV(t)), OV(t): TERM$\rightarrow \mathbb{P}(Var)$, sunt:

i) Dacă $t = c_i$, atunci OV(t) = $\emptyset$.
ii) Dacă $t = x_i$, atunci OV(t) = $\{x_i\}$.
iii) Dacă $t = f_i^n\ (t_1 \ldots t_n)$, atunci OV($t$) = OV($t_1$) $\cup$ OV(t_2) $\cup$ ...OV(t_n).

Similar notaţiei introdusă pentru specificarea variabilelor propoziţionale ale unei formule a calculului propoziţional, notăm sintetic faptul că un termen t conţine variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, prin $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definiţie 3.10: Fie $\mathcal{L}(\sigma)$ un limbaj, σ o signatură. Ocurenţele variabilelor libere (VL(φ)) ale unei formule φ, VL(φ): FORM$\rightarrow \mathbb{P}(Var)$, sunt:

i) Dacă $\varphi = P_i^n\ (t_1, \ldots, t_n)$, atunci VL($\varphi$) = OV($t_1$) $\cup$ OV(t_2) $\cup$ ... OV(t_n).
ii) Dacă $\varphi = (t_i = t_j)$, atunci VL(φ) = OV(t_i) $\cup$ OV(t_j).
iii) Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, atunci VL(φ) = VL(ψ).
iv) Dacă $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, atunci VL($\varphi$) = VL($\psi$) $\cup$ VL(χ).
v) Dacă $\varphi = \forall x(\psi)$, atunci VL($\varphi$) = VL($\psi$)$\backslash\{x\}$.

În acord cu notaţia introdusă pentru specificarea ocurenţelor variabilelor unui termen, notăm, în cazul formulelor, prin $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ faptul că formula φ conţine variabilele libere $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dacă într-o formulă o variabilă nu apare liberă, atunci spunem că variabila este *legată*. O formulă φ care nu are variabile libere se numeşte *formulă închisă*.

Propoziţiile din $\mathcal{L}(\sigma)$ sunt, acum, simplu de specificat:

Definiţie 3.11: Fie σ o signatură şi φ o formulă. Dacă VL(φ) = Ø, atunci φ este o propoziţie, φ∈ PROP.

Să introducem, în continuare, câteva definiţii la care vom apela în cursul demonstraţiilor viitoare.

Definiţie 3.12: (*complexitatea termenilor* $c(t)$) Fie σ o signatură şi t un termen. Complexitatea $c(t)$ a termenului t se defineşte astfel:

i) Dacă $t = c_i$, atunci $c(t) = 0$.

ii) Dacă $t = x_i$, atunci $c(t) = 0$.

iii) Dacă $t = f_i^n\,(t_1 \ldots t_n)$, atunci $c(t) = max(c(t_1), c(t_2), \ldots c(t_n)) + 1$.

Definiţie 3.13: (*complexitatea formulelor* $c(\varphi)$) Fie σ o signatură şi φ o formulă. Complexitatea $c(\varphi)$ a formulei φ se defineşte:

iv) Dacă $\varphi = P_i^n\,(t_1, \ldots, t_n)$, atunci $c(\varphi) = 0$.

v) Dacă $\varphi = (t_i = t_j)$, atunci $c(\varphi) = 0$.

vi) Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, atunci $c(\varphi) = c(\psi) + 1$.

vii) Dacă $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, atunci $c(\varphi) = max(c(\psi), c(\chi)) + 1$.

viii) Dacă $\varphi = \forall x(\psi)$, atunci $c(\varphi) = c(\psi) + 1$

Pentru a putea surprinde unele subtilităţi ale demonstraţiei de completitudine a logicii de ordinul I vom apela adesea la cuantificatorul existenţial ($\exists$) şi la intuiţiile care îl sprijină, definindu-l sintactic prin următoarea abreviere:

Cuantificatorul existenţial [$\exists x(\varphi)$]: $\exists x(\varphi) =_{\text{df}} \neg\forall x(\neg\varphi)$.

Definiţiile operatorilor *conjuncţiei*[$\wedge$], *disjuncţiei*[$\vee$] şi *echivalenţei*[$\equiv$] sunt identice cu cele din calculul propoziţional (p. 46).

SEMANTICA LOGICII DE ORDINUL I

Structuri şi asignări.

Să începem discuţia privind construirea laturii semantice a unui limbaj de ordinul I pornind de la observaţia că pentru evalua dacă o σ-propoziţie φ a lui $\mathcal{L}$ este sau nu adevărată trebuie să specificăm o interpretare a simbolurilor signaturii σ într-un anumit context[5]. Situaţia sau contextul relativ la care vom evalua σ-propoziţia φ trebuie să conţină un domeniu de valori pentru variabile, pe care îl vom nota în continuare cu *D*, iar interpretarea, pe care o vom nota cu *i*, constă în a specifica semnificaţia simbolurilor signaturii în cadrul domeniului. Cele două itemuri, respectiv domeniul şi interpretarea formează o *structură M* a acelei signaturi, motiv pentru care specificăm structura *M* ca o σ-structură *M*, simbolic $M = <D, i>$. De pildă, fie σ-formula $\forall x \exists y(R(xy))$, unde $\sigma = \{R\}$. În acord cu cele spuse mai sus, formula $\forall x \exists y(R(xy))$ nu poate fi evaluată din punctul de vedere al valorii ei de adevăr decât în măsura în care:

a) Stabilim domeniul valorilor variabilelor *x* şi *y*.

b) Stabilim în acest domeniu care este semnificaţia simbolului predicaţional *R*.

Evident, aceeaşi formulă poate fi adevărată în unele structuri şi falsă în altele. De pildă, pentru formula de mai sus putem considera structura $<\mathbb{N}, i_1>$ unde domeniul de valori ale variabilelor este mulţimea numerelor naturale $D = \mathbb{N}$, iar $i_1(R)$ este relaţia < (strict mai mic) stabilită pe ℕ, sintetic exprimat: $M = <\mathbb{N}, <>$. Formula $\forall x \exists y(R(xy))$ asertează, în acest context interpretativ, că pentru orice număr natural *x*, există un număr natural *y* strict mai mare decât *x*, ceea ce este, cel puţin în interpretarea standard a mulţimii numerelor naturale[6], adevărat. Ca un alt exemplu, să păstrăm domeniul $D = \mathbb{N}$ dar să interpretăm simbolul predicaţional *R*, prin relaţia de divizibilitate[7] pe mulţimea numerelor naturale, $i_2(R) = /$; în acest caz formula noastră asertează că orice număr natural este divizorul unui alt număr

---

[5] Considerăm că simbolurile logice şi cele de punctuaţie au o interpretare fixă, independentă de contextul în care evaluăm formula.

[6] Există matematicieni care contestă infinitatea numerelor naturale.

[7] Definim relaţia de divizibilitate x/y extensional, ca fiind compusă din toate perechile ordonate de numere $<a, b>$ astfel încât *b* se împarte la *a* fără rest. Formal: $x/y=\{<a, b> / \exists c \in \mathbb{N}, \text{a.î. } a \cdot c = b\}$

natural, ceea ce este din nou adevărat. Dar să vedem structuri în care această formulă este falsă. Pentru a indica o astfel de interpretare este suficient să restrângem domeniul primelor structuri la o submulţime finită. Fie, aşadar,

$$M': \langle D = \{1, 2, \ldots, 10\}, i_{M'}(R) = \langle\rangle.$$

Formula $\forall x \exists y \mathrm{R}(xy)$ este evident falsă în această structură, nici unul dintre numerele domeniului D nefiind mai mare decât 10. Cu privire la cel de-al doilea exemplu, dacă vom interpreta simbolul R ca relaţia de divizibilitate, păstrând neschimbat domeniul structurii M', obţinem o nouă structură,

$$M'': \langle D = \{1, 2, \ldots, 10\}, i_{M''}(R) = / \rangle$$

în care formula $\forall x \exists y(\mathrm{R}(xy))$ este de asemenea falsă – numărul 7, de pildă, nu este divizorul nici unui alt număr din D.

Cu aceste exemple în minte, să încercăm să definim ce anume este o interpretare a signaturii σ. În primul rând, o interpretare trebuie să asocieze fiecărei constante a signaturii un element din domeniul D, fiecărui simbol funcţional n-ar, pentru orice n natural, o funcţie n-ară definită pe D^n cu valori în D, şi fiecărui simbol predicaţional n-ar, pentru orice n natural, o relaţie[8] n-ară definită pe D^n.

Definiţie 3.14: Fie σ o signatură. Numim cuplul $M = \langle D, i \rangle$, o σ-*structură* M dacă $D \neq \varnothing$ iar i: $\sigma \to D$ respectă următoarele clauze:

i) fiecărei constante $c_i \in C$ îi asociază un element determinat din domeniul D, $i(c_i) = c_i^M \in D$.

ii) fiecărui simbol funcţional n-ar $f_j^n \in F$ îi asociază o funcţie n-ară $i(f_j^n) = f_j^{n,M} : D^n \to D$.

iii) fiecărui simbol predicaţional n-ar $P_k^n \in Pr$, îi asociază o relaţie n-ară $i(P_i^n) = P_i^{n,M} \subseteq D^n$.

Detaliat, numim uplul: $M = \langle D, c_i^M, f_j^{m,M}\ P_k^{n,M} \rangle$, $i, j, k, m, n \in \mathbb{N}$, o σ-*structură M*.

Pentru că în definiţiile şi demonstraţiile următoare vom folosi copios atât simbolurile signaturii cât şi interpretările acestora, notaţia va deveni din ce în ce mai greoaie şi mai dificil de urmărit, motiv pentru care vom renunţa la harnaşamentul

[8] După cum exemplele de mai sus sugerează, înţelegem extensional relaţiile, ca mulţimea tuturor n-uplurilor pentru care relaţia are loc.

de specificaţii al arităţii funcţiilor şi predicatelor precum şi la indexarea acestora, acolo unde contextul clarifică orice potenţială ambiguitate. În consecinţă, $f_i^n(t_1 \ldots t_n)$ va fi abreviat prin $f(t_1 \ldots t_n)$, $P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ prin $P(t_1, \ldots, t_n)$, $i(f_i^m) = f_i^{m,M}$ prin f^M, $i(P_i^n) = P_i^{m,M}$ prin P^M.

În măsura în care $\mathcal{L}(\sigma)$ este construit recursiv putem determina valoare de adevăr a unei formule complexe ca o funcţie a valorii de adevăr a componentelor sale, mergând până la, evident, elementele de bază ale formulei. Două probleme intervin în acest punct. Prima este că deşi recursivitatea ne ajută să determinăm valoarea de adevăr a unor propoziţii ca o funcţie a valorii de adevăr a subformulelor imediate ale acestora, de pildă, în cazul definiţiei condiţiilor de adevăr pentru submulţimea A = $\{\varphi/\varphi \in \text{PROP}, \varphi = (\neg\psi), \varphi = (\psi\rightarrow\chi)\}$, totuşi, mulţimea PROP nu se reduce la mulţimea A, iar valoarea de adevăr a formulelor atomare FORM_ATOM $\subset$ PROP nu se determină prin apel la valoarea de adevăr a subformulelor imediate ale acestora. Desigur, problema ar putea fi remediată uşor specificând valoarea de adevăr a formulelor atomare în funcţie de apartenenţa/ nonapartenenţa referenţilor termenilor la mulţimea determinată de predicat, dacă limbajul nostru nu ar conţine variabile ci doar simboluri predicaţionale şi constante individuale. Dar cum se poate evalua, în teremenii descrişi mai sus (de apartenenţă/nonapartenenţă a referenţilor termenilor la mulţimea determinată de un predicat) o formulă atomară compusă din variabile sau termeni care conţin la rândul lor variabile individuale? A doua problemă intervine în cazul specificării condiţiilor de adevăr ale unei formule cuantificate. O definiţie recursivă ar trebui să specifice cazurile în care o formulă cuantificată este adevărată sau falsă prin apel la valoarea de adevăr a subformulei ce urmează cuantificatorului şi variabilei aferente cuantificatorului. O astfel de formulă, însă, poate avea variabile libere. Cele două probleme sunt corelate şi presupun o soluţie comună: aceea de a introduce o modalitate prin care să atribuim valori de adevăr formulelor, nu doar propoziţiilor. Soluţia constă în construirea unei funcţii care să asigneze referenţi variabilelor individuale. Într-un anumit fel, ceea ce încercăm să facem este să gândim variabilele ca nume temporare având însă grijă să recuperăm modul nedeterminat sau ambiguu în care variabilele denotă elemente ale domeniului structurii considerate.

Mijlocul cel mai eficient de a aplica un astfel de tratament variabilelor constă, ca în atâtea cazuri, în construcţia unei funcţii care să atribuie referenţi variabilelor limbajului. Din consideraţii asupra cărora nu vom insista aici[9] este mai eficient să atribuim simultan câte un referent tuturor variabilelor limbajului nostru. În acord cu această intuiţie putem considera că o variabilă individuală denotă un obiect oarecare din D prin intermediul unei funcţii numită funcţia de asignare şi notată cu s. Prin urmare, următorul pas este să definim o funcţie s pe mulţimea variabilelor individuale Var şi cu valori în mulţimea elementelor domeniului D,

$$s: Var \to D.$$

Acum, funcţia de asignare stabileşte un singur referent unei variabile oarecare iar acest referent rămâne fix. În această situaţie, cum anume vom recupera ambiguitatea referenţială a variabileleor? O primă strategie este să considerăm structuri care diferă de structura în discuţie prin faptul [dacă este un fapt] că atribuie un alt referent unei variabile. Aceste structuri pot fi gândite ca nişte izotopi ai structurii iniţiale, diferind de aceasta doar prin atribuirea unui alt referent din domeniul modelului, unei variabilei individuale. Ambiguitatea referenţială a variabilei este prezervată, aşadar, prin faptul că variabila poate denota referenţi diferiţi în aceşti izotopi, în timp ce o constantă individuală, de pildă, nu poate denota decât acelaşi obiect în toţi izotopii consideraţi.

Putem să recuperăm, însă, această ambiguitate referenţială şi în următorul mod. Fie, de pildă, o funcţie de asignare s. Această funcţie specifică într-un mod determinat cărei variabile îi corespunde ce valoare sau ce obiect al domeniului D. Acum, putem să recuperăm ambiguitate referenţială a unei variabile, de pildă x, definind funcţii de asignare s' care diferă de s doar în atribuirea de valori variabilei x. În acord cu cele spuse mai sus, recuperăm ambiguitatea referenţială a unei variabile x prin considerarea unor funcţii izotopi ai funcţiei de asignare s, ceea ce revine la a defini o funcţie de asignare $s' = s[x{:=}d]$ ca asignarea ce diferă de s prin faptul că asociază variabilei x obiectul d din domeniul D, păstrând toate celelalte asignări de variabile identice cu s.

Fie $s: Var \to D$, o asignare oarecare de variabile. În aceste condiţii definim:

$$s[x{:=}d]: Var \to D, \text{ prin}$$

[9] Dar vezi, de pildă, L.T.F. Gamuth [1991], *Logic, language and meaning*, vol I 'Introduction to logic', Chicago, London: The University of Chicago Press, pp. 95-96.

$$s[x:=d](y): \begin{cases} d, \text{ dacă } y = x \\ s(y), \text{ dacă } y \neq x \end{cases}$$

Funcţia de asignare s împreună cu structura M formează un cuplu $<M, s>$ care este suficient pentru a specifica valoarea de adevăr a formulelor limbajului considerat. În acest scop, însă, trebuie să definim cum anume funcţia de asignare s ne permite să interpretăm în mod univoc termenii limbajului considerat.

Concepte semantice fundamentale. Teorema coincidenței asignărilor.

Definiţie 3.15: Fie σ o signatură şi M o σ-structură. *Valoarea unui termen t în asignarea s*, notată în continuare prin $\bar{s}(t)$, este extensia $\bar{s}$: TERM → D, determinată de funcţia de asignare s, care satisface următoarele clauze:

i) Dacă $t = c_i$, $c_i \in C$, atunci $\bar{s}(t) = s(t) = i(c) = c_i^M$.

ii) Dacă $t = x_i$, $x_i \in Var$, atunci $\bar{s}(t) = s(t) = s(x_i)$.

iii) Dacă $t = f(t_1 \ldots t_n)$, atunci $\bar{s}(t) = f^M(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n))$.

Cu ajutorul funcţiei de asignare s[10] putem preciza condiţiile de adevăr ale formulelor. În acest scop, vom defini noţiunea de *satisfiabilitate* a unei formule φ. Sintetizând discuţia de mai sus să observăm că pentru a evalua o formulă avem nevoie de o structură M şi de o funcţie de asignare s. Aceasta este semnificaţia simbolurilor M şi s prezente în definiţia satisfiabilităţii unei formule.

Definiţie 3.16: Fie σ o signatură, φ o formulă şi M o σ-structură. Spunem că φ este *satisfiabilă în structura M şi asignarea s*, simbolic, $(M, s) \models \varphi$, în următoarele cazuri:

i) Dacă $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$, atunci $(M, s) \models \varphi$ ddacă $<\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n)> \in P^M$.

ii) Dacă $\varphi = (t_i = t_j)$, atunci $(M, s) \models \varphi$ ddacă $\bar{s}(t_i) = \bar{s}(t_j)$.

iii) Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, atunci $(M, s) \models \varphi$ ddacă $(M, s) \not\models \psi$[11].

iv) Dacă $\varphi = (\psi \to \chi)$, atunci $(M, s) \models \varphi$ ddacă, fie $(M, s) \not\models \psi$, fie $(M, s) \models \chi$.

v) Dacă $\varphi = \forall x(\psi)$, atunci $(M, s) \models \varphi$ ddacă pentru orice $d \in D$, $(M, s[x := d]) \models \psi$.

---

[10] Şi, evident, extensiei corespunzătoare $\bar{s}$.

[11] Semnificaţia notaţiei $(M, s) \not\models \psi$ este, cred, destul de intuitivă: nu este cazul că $(M, s) \models \psi$.

Definiţie 3.17: Spunem că $\Gamma \subset$ FORM este *satisfiabilă în structura M şi asignarea s*, simbolic, $(M, s) \models \Gamma$, ddacă $(M, s) \models \varphi$, pentru orice $\varphi \in \Gamma$.

Definiţie 3.18: Spunem că *M este un model al formulei* φ sau că φ este *adevărată* în structura M, simbolic $M \models \varphi$, ddacă $(M, s) \models \varphi$ pentru orice asignare s. Dacă $\Gamma \subset$ FORM, spunem că *M este un model al mulţimii* Γ, simbolic, $M \models \Gamma$, ddacă $M \models \varphi$, pentru orice $\varphi \in \Gamma$.

Definiţie 3.19: Spunem despre o formulă φ că este *validă*, simbolic, $\models \varphi$, ddacă φ este adevărată în orice structură M, sau că orice structură M este un model al formulei φ.

Definiţie 3.20: Spunem despre o formulă φ că este *contradictorie semantic* sau *inconsistentă*, simbolic, $\not\models \varphi$, ddacă φ nu este adevărată în nici o structură M sau, corelativ, că nici o structură M nu este un model al formulei φ.

Definiţie 3.21: Spunem că φ este o *consecinţă semantică* a mulţimii Γ, sau că Γ *implică logic* φ, simbolic, $\Gamma \models \varphi$, dacă pentru orice structură M şi orice asignare s are loc: dacă $(M, s) \models \Gamma$, atunci $(M, s) \models \varphi$. De asemenea, spunem că Δ este o *consecinţă semantică* a mulţimii Γ, simbolic, $\Gamma \models \Delta$, dacă pentru orice structură M şi asignare s are loc: dacă $(M, s) \models \Gamma$, atunci $(M, s) \models \Delta$.

Remarcaţi ambiguitatea metasimbolului $\models$: în *definiţia 3.16* simbolul denotă relaţia de *satisfiabilitate*, pe când în *definiţia 3.21* denotă relaţia de *consecinţă semantică*. Ceea ce dezambiguizează semnificaţia simbolului este, evident, contextul folosirii: dacă $\models$ este precedat de M, sau *M, s* avem în vedere satisfiabilitatea, dacă, în schimb, simbolul este precedat de mulţimi de formule sau propoziţii Γ, Δ, avem în vedere relaţia de consecinţă semantică.

În acord cu intuiţiile noastre conform cărora satisfiabilitatea unei formule depinde doar de interpretarea simbolurilor şi de valoarea variabilelor libere ale formulei, putem demonstra, cu ajutorul definiţiilor precedente, că satisfiabilitatea unei formule este determinată complet de variabilele libere ale acesteia plus, evident, interpretarea simbolurilor într-o anumită structură. Vom operaţionaliza ideea că satisfiabilitatea unei formule este complet determinată de variabilele libere ale acesteia prin sarcina de a arăta că orice asignare s' care este identică cu o altă asignare s în valorile pe care le atribuie variabilelor libere ale unei formule φ, dar diferă în atribuirea de valori celorlalte variabile, atribuie formulei φ aceeaşi valoare de adevăr. Mai precis:

Teorema 3.3: *Teorema coincidenţei asignărilor variabilelor libere ale formulelor* (pe scurt *teorema coincidenţei formulelor*). Fie σ o signatură, $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \in$ FORM, s şi s', două asignări astfel încât $s(x_i) = s'(x_i)$, pentru orice $1 \leq i \leq n$. În aceste condiţii: $(M, s) \models \varphi$ ddacă $(M, s') \models \varphi$

Procedura de demonstraţie a acestei teoreme este inducţia pe complexitatea formulelor. În acest scop, ar trebui să stabilim cazurile de bază, respectiv, cazurile în care formula are complexitatea 0, ceea ce revine la verificarea cazurilor când formula este atomară. Acest lucru, însă, presupune că valoarea unui termen t într-o asignare oarecare s este determinată. Prin urmare, ar trebui să ne asigurăm că oricare două funcţii de asignare s şi s' care atribuie aceleaşi valori variabilelor unui termen, atribuie şi termenului aceeaşi valoare. Acesta este sensul lemei de mai jos:

Lema 3.1: *Lema coincidenţei asignărilor variabilelor libere ale termenilor*: Fie σ o signatură, $t \in$ TERM, s şi s', două asignări astfel încât $s(x_i) = s'(x_i)$, pentru orice $1 \leq i \leq n$ şi orice $x_i \in$ OV(t). În aceste condiţii:

$$\overline{s}(t) = \overline{s'}(t)$$

Demonstraţie [prin inducţie pe TERM]

Cazul de bază. Conform principiului inducţiei structurale pentr termeni, cazul de bază se divide în două subcazuri: când $t \in$ TERM este o constantă, şi când t este o variabilă. Să le considerăm pe rând.

a) $t = c$; OV(t) = OV(c) = Ø, prin urmare:

$\overline{s}(t) = s(t) = s(c) = i(c)$ [definiţia valorii unui termen în asignarea s]

$= \overline{s'}(t)$ [definiţia valorii unui termen în asignarea s']

b) $t = x_i$; OV(t) = OV(x_i) = $\{x_i\}$, prin urmare,

$\overline{s}(t) = s(x_i)$ [definiţia valorii unui termen în asignarea s]

$= s'(x_i)$ [definiţia asignării s']

$= \overline{s'}(t)$ [definiţia valorii unui termen în asignarea s']

Pasul inductiv. În acord cu principiul inducţiei structurale pentru termeni pasul inductiv este constituit de cazul în care $t = f(t_1 \ ... \ t_n)$. Prin *ipoteza inducţiei* înţelegem că $\overline{s}(t_i) = \overline{s'}(t_i)$, pentru orice $1 \leq i \leq n$. Aşadar,

c) $t = f(t_1 \ldots t_n)$; $\mathrm{OV}(t) = \mathrm{OV}(f(t_1 \ldots t_n)) = \mathrm{OV}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{OV}(t_n)$, de unde deducem:
$\bar{s}(t) = f^M(\bar{s}(t_1) \ldots \bar{s}(t_n))$ [definiţia valorii unui termen în asignarea *s*]
$= f^M(\overline{s'}(t_1) \ldots \overline{s'}(t_m))$ [ipoteza inducţiei]
$= \overline{s'}(t)$ [definiţia valorii unui termen în asignarea *s'*]

Odată cu stabilirea pasului inductiv, *lema coincidenţei termenilor* este demonstrată. Acum putem demonstra teorema *teorema coincidenţei formulelor*. Metoda demonstraţiei este inducţia pe complexitatea formulelor.

Demonstraţie teorema coincidenţei formulelor [prin *inducţie* pe $c(\varphi)$]
Cazul de bază. Pentru că avem două tipuri de formule de complexitate 0, demonstraţia va avea două cazuri de bază:
a) $\varphi = P(t_1 \ldots t_n)$, $c(\varphi) = 0$. În acest caz, $\mathrm{VL}(\varphi) = \mathrm{OV}\{t_1, \ldots, t_n\}$. Din definiţia asignărilor *s* şi *s'* ştim că $s(x_i) = s'(x_i)$ pentru orice $x_i \in \mathrm{VL}(\varphi)$. Prin urmare, putem aplica *lema coincidenţei termenilor* pentru a stabili că:

$$(1)\ s(t_i) = s'(t_i), \text{ pentru orice } t_i \in \{t_1, \ldots, t_n\}.$$

Acum, $(M, s) \models P(t_1, \ldots, t_m)$ ddacă $<\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n)> \in P^M$ [*definiţia 3.16*, cazul i)]
ddacă $<\overline{s'}(t_1), \ldots, \overline{s'}(t_n)> \in P^M$ [din (1)]
ddacă $(M, s') \models P(t_1, \ldots, t_m)$ [*definiţia 3.16* cazul i)]
b) $\varphi = (t_i = t_j)$, $t_i, t_j \in \mathrm{TERM}$, $c(\varphi) = 0$. În acest caz, $\mathrm{VL}(\varphi) = \mathrm{OV}(t_i) \cup \mathrm{OV}(t_j)$. Din definiţia asignărilor *s* şi *s'* ştim că $s(x_i) = s'(x_i)$ pentru orice $x_i \in \mathrm{VL}(\varphi)$ Prin urmare putem aplica *lema coincidenţei termenilor* pentru a stabili că:

$$(2)\ \bar{s}(t_i) = \overline{s'}(t_i) \text{ şi}$$

$$(3)\ \bar{s}(t_j) = \overline{s'}(t_j).$$

Dar, $(M, s) \models (t_i = t_j)$ ddacă $\bar{s}(t_i) = \bar{s}(t_j)$ [*definiţia 3.16*, cazul ii)]
ddacă $\overline{s'}(t_i) = \overline{s'}(t_j)$ [din (2) şi (3)]
ddacă $(M, s') \models (t_i = t_j)$ [*definiţia 3.16*, cazul ii]
Paul inductiv: trebuie să precizăm mai întâi, că *ipoteza inducţiei* constă în presupunerea că toate formulele φ, astfel încât $c(\varphi) < n$, respectă echivalenţa:

$$\text{(IH) } (M, s) \models \varphi \text{ ddacă } (M, s') \models \varphi.$$

Fie φ o formulă astfel încât $c(\varphi) = n$. În acest caz, φ poate avea doar una dintre formele $(\neg\psi)$, $(\psi \to \chi)$ sau $\forall x(\psi)$. Să desfăşurăm demonstraţia pasului inductiv corespunzător acestor forme:

c) $\varphi = (\neg\psi)$; $c(\varphi) = c(\neg\psi) = n$. Evident, $VL(\varphi) = VL(\neg\psi)$. Din $c(\neg\psi) = n$ rezultă că $c(\psi) < n$. Prin urmare, formula ψ respectă *ipoteza inducţiei*, adică:

$$\text{(IH) } (M, s) \models \psi \text{ ddacă } (M, s') \models \psi.$$

Nu este greu de observat că ipoteza inducţiei este echivalentă cu[12]

$$\text{(IH') } (M, s) \not\models \psi \text{ ddacă } (M, s') \not\models \psi.$$

Acum, $(M, s) \models (\neg\psi)$ ddacă $(M, s) \not\models (\neg\psi)$ [*definiţia 3.16* caz iii)]

ddacă $(M, s') \not\models (\neg\psi)$ [(IH')]

ddacă $(M, s') \models (\neg\psi)$ [*definiţia 3.16* caz iii)]

d) $\varphi = (\psi \to \chi)$; $c(\varphi) = c(\psi \to \chi) = n$. Evident, $VL(\varphi) = VL(\psi) \cup VL(\chi)$. Din $c(\varphi) = c(\psi \to \chi) = n$ rezultă că $c(\psi) < n$ şi $c(\chi) < n$. Prin urmare, formulele ψ şi χ respectă *ipoteza inducţiei*, adică,

$$(\text{IH}_1)\ (M, s) \models \psi \text{ ddacă } (M, s') \models \psi \text{ şi}$$
$$(\text{IH}_2)\ (M, s) \models \chi \text{ ddacă } (M, s') \models \chi.$$

Nu este greu de observat că (IH_1) este echivalent cu[13]

$$(\text{IH}_1')\ (M, s) \not\models \psi \text{ ddacă } (M, s') \not\models \psi.$$

Dar,

$(M, s) \models (\psi \to \chi)$ ddacă fie 1) $(M, s) \not\models \psi$, fie 2) $(M, s) \models \chi$ [*definiţia 3.16* caz iv)]

În cazul 1) avem $(M, s) \not\models \psi$ ddacă $(M, s') \not\models \psi$ [(IH_1')] iar în cazul

2) avem $(M, s) \models \chi$ ddacă $(M, s') \models \chi$ [(IH_2)].

Aşadar, $(M, s) \models (\psi \to \chi)$ ddacă $(M, s') \models (\psi \to \chi)$

e) $\varphi = \forall x(\psi)$; $VL(\psi) \subseteq VL(\varphi) \cup \{x\}$, $c(\varphi) = c(\forall x(\psi)) = n$, aşadar $c(\psi) < n$.

Din $VL(\psi) \subseteq VL(\varphi) \cup \{x\}$, deducem că, pentru un $d \in D$ fixat, $s[x:=d]$ şi $s'[x:=d]$ atribuie aceleaşi valori tuturor variabilelor libere ale formulei ψ. Cum $c(\psi) < n$, putem aplica ipoteza inducţiei şi obţinem

$$\text{(IH) } (M, s[x:=d]) \models \psi \text{ ddacă } (M, s'[x:=d]) \models \psi .$$

Acum,

$(M, s) \models \forall x(\psi)$ ddacă pentru orice $d \in D$ $(M, s[x:=d]) \models \psi$ [*definiţia 3.16* caz v)].

ddacă pentru orice $d \in D$ $(M, s'[x:=d])$ [ipoteza inducţiei]

ddacă $(M, s') \models \forall x(\psi)$ [definiţia satisfiabilităţii]

---

[12] Pe baza echivalenţei dintre *p ddacă q* şi $\neg$*p ddacă* $\neg$*q*.

[13] Vezi nota de mai sus

Teorema coincidenţei ne permite să demonstrăm următorul rezultat:

Teorema 3.4: Fie σ o signatură şi $\varphi \in$ PROP. Atunci fie $M \models \varphi$ fie $M \models (\neg\varphi)$.

Demonstraţie: din definiţia a ceea ce înseamnă o propoziţie φ a unei signaturi σ, rezultă că VL(φ) = Ø (φ nu are variabile libere). Din *teorema coincidenţei formulelor* ştim că pentru orice asignare *s* care coincide cu asignarea *s*' în atribuirea de valori variabilelor libere ale lui φ, are loc

$$(M, s) \models \varphi \text{ ddacă } (M, s') \models \varphi.$$

Însă formula φ nu are nici o variabilă liberă ceea ce înseamnă că dacă există o asignare *s* în care formula φ este satisfiabilă, atunci φ e satisfiabilă în orice altă asignare *s*' deorece cele două asignări coincid în atribuirea de valori variabilelor libere ale lui φ. Aşadar, fie există o asignare *s* care satisface formula φ ceea ce înseamnă că φ este satisfiabilă în toate asignările, adică $M \models \varphi$, fie există o asignare *s* astfel încât formula φ nu este satisfiabilă în *s*, dar, în acest caz, formula φ nu este satisfiabilă în nici o asignare *s*', de unde rezultă că $M \models (\neg\varphi)$.

SUBSTITUŢIA

Cu ajutorul dezvoltărilor de mai sus putem defini una dintre operaţiile fundamentale în LOI, substituţia, care se va dovedi centrală în demonstraţia corectitudinii sistemului axiomatic al LOI pe care îl vom prezenta în secţiunea următoare. Ca în cazul calculului propoziţiilor vom începe cu definirea sintactică a operaţiei de substituţie şi apoi, pornind de la această definiţie sintactică, vom preciza valoarea semantică a acesteia. Să vedem în mod intuitiv ce anume presupune operaţia de substituţie.

Fie următoarea ecuaţie:

$$(1)\quad \int_2^4 (x + 2y)dx = 24.$$

În limbajul logicii de ordinul I, ecuaţia (1) este un predicat unar de variabilă *y*. Dacă tratăm variabila *y* ca o constantă, putem integra ecuaţia de mai sus şi obţinem:

$$\int_2^4 (x + 2y)dx = [x^2 + 2xy]_2^4 = (16 + 8y) - (4 + 4y) = 4y + 12 = 24.$$

După cum se poate observa, asignarea s care atribuie variabilei y valoarea 3 satisface predicatul exprimat de ecuaţia (1).

Acum, să presupunem că îl substituim pe y cu x în ecuaţia noastră iniţială. În acest caz obţinem:

$$24 = \int_2^4 (x + 2x)dx = \int_2^4 3xdx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_2^4 = 24 - 6 = 18.$$

După cum ne indică rezultatele diferite pe care le-am obţinut în cele două cazuri ceva este dubios în substituţia lui x cu y. Ce anume nu este greu de văzut: substituindu-l pe y cu x am obţinut dintr-o ocurenţă liberă a lui y o ocurenţă legată a lui x, aşadar, ecuaţia obţinută în cel de-al doilea caz, nu mai este un predicat unar de variabilă y, ci o propoziţie contradictorie: 24 = 18. Prin urmare, dacă dorim ca o substituţie să păstreze valoarea de adevăr a propoziţiilor, trebuie să eliminăm situaţiile în care o ocurenţă a uneia dintre variabilele termenului t, termenul substituant, devine legată după efectuarea operaţiei de substituţie a unei variabile libere oarecare x_i cu termenul t. Cum anume realizăm acest lucru? Strategia este să definim recursiv cazurile în care substituţia unei variabile x cu un termen t nu afectează valoarea de adevăr a formulei, caz în care vom spune că *t este substituibil lui x*. În acest scop să definim, în prealabil, (tot recursiv) mecanismul subtituţiei.
Să notăm prin $[t_j/x_i]$ substituţia variabilei x_i cu termenul t_j. Vom defini substituţia în cazul termenilor după care vom defini această operaţie pentru formulele unei signaturi σ. În definiţiile care urmează asumăm implicit că toţi termenii menţionaţi aparţin mulţimii TERM, formulele φ aparţin mulţimii FORM, iar variabilele aparţin mulţimii *Var*.

Definiţie 3.22: (*substituţia pentru termeni*[14]) Fie σ o signatură. În aceste condiţii, definim $t[t_j/x_i]$ astfel:

i) Dacă $t = c_i$, $c_i \in C$, atunci $t[t_j/x_i] = c_i[t_j/x_i] = c_i$.

ii) Dacă $t = y_i$, $y_i \in Var$, atunci $t[t_j/x_i] = y_i[t_j/x_i] = \begin{cases} t_j, \text{dacă } y_i = x_i \\ y_i, \text{dacă } y_i \neq x_i \end{cases}$

iii) Dacă $t = f(t'_1 \dots t'_n)$, atunci $t[t_j/x_i] = f(t'_1 \dots t'_n)[t_j/x_i] = f(t'_1[t_j/x_i] \dots t'_n[t_j/x_i])$.

[14] Prescurtat, de aici înainte, prin vom *substituţia termenilor*.

Definiţie 3.23: (*substituţia pentru formule*[15]) Fie σ o signatură. În aceste condiţii, definim $\varphi[t_j/x_i]$ astfel:

i) Dacă $\varphi = P(t'_1 \ldots t'_n)$, atunci $\varphi[t_j/x_i] = P(t'_1[t_j/x_i] \ldots t'_n[t_j/x_i])$

ii) Dacă $\varphi = (t'_m = t'_n)$, atunci $\varphi[t_j/x_i] = (t'_m[t_j/x_i] = t'_n[t_j/x_i])$

iii) Dacă $\varphi = (\neg\psi)$, atunci $\varphi[t_j/x_i] = (\neg\psi[t_j/x_i])$

iv) Dacă $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, atunci $\varphi[t_j/x_i] = (\psi[t_j/x_i] \rightarrow \chi[t_j/x_i])$

v) Dacă $\varphi = \forall x(\psi)$, atunci $\varphi[t_j/x_i] = \begin{cases} \forall x(\psi[t_j/x_i]), \text{dacă } x \neq x_i. \\ \forall x(\psi), \text{dacă } x = x_i. \end{cases}$

Pentru a-şi verfica înţelegerea definiţiei substitutibilităţii, cititorul poate încerca să demonstreze că rezultatul substituţiei în cadrul unui termen sau al unei formule este tot un termen sau o formulă, precum şi următoarea lemă (pe care o vom utiliza în demonstraţia teoremei substituţiei):

Lema 3.2: Fie σ o signatură şi $\varphi \in$ FORM. Dacă $x_i \notin$ VL(φ), atunci $\varphi[t_j/x_i] = \varphi$.

Acum putem defini când anume un termen *t este substituibil lui x în φ* sau *t este liber pentru x în φ*, adică situaţiile în care o variabilă a unei formule poate fi substituită cu un termen astfel încât să nu modifice valoarea de adevăr a formulei.

Definiţie 3.24: Fie σ o signatură. Spunem că *t este substituibil lui x în φ* ddacă:

i) $\varphi \in$ FORM_ATOM

ii) $\varphi = (\neg\psi)$ şi t este substituibil lui x în ψ.

iii) $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ şi t este substituibil lui x în ψ şi χ.

iv) $\varphi = \forall y(\psi)$ şi $\begin{cases} x \notin \mathrm{VL}(\varphi) \\ \text{sau} \\ y \notin \mathrm{OV}(t) \text{ şi } t \text{ este substituibil lui } x \text{ în } \psi \end{cases}$.

Aceste definiţii ne vor permite să demonstrăm o teoremă importantă a cărei consecinţă priveşte statutul funcţiei semantice a termenilor în cadrul logicii de ordinul I[16]. Din formularea definiţiilor de mai sus este clar că ceea ce ne interesează este ca procesul de substituire a unei variabile cu un termen să nu modifice valoare

[15] Prescurtat, de aici înainte, prin vom *substituţia formulelor*.

[16] Teorema substituţiei a fost folosită de către Willard van Orman Quine pentru a obiecta împotriva legitimităţii logicii modale cuantificate. Obiecţiile lui Quine au declanşat o dispută privind modalităţile de cuantificare şi rolul termenilor în cadrul unei semantici care au culminat prin introducerea conceptului de designatori rigizi şi constituirea unei noi teorii a referinţei.

de adevăr a formulei. Scopul *teoremei substituţiei* – teorema de mai jos – este de a demonstra acest lucru în cadrul formal al semanticii limbajului $\mathscr{L}(\sigma)$.

Teorema 3.5: (*Teorema substituţiei*) Fie σ o signatură, t, $t_j \in$ TERM, $\varphi \in$ FORM, $x_i \in Var$ astfel încât t_j *este substituibil lui* x_i, s o asignare oarecare şi $s[x_i := \bar{s}(t_j)]$ o asignare izotop. În aceste condiţii:

$$a)\ \bar{s}(t[t_j/x_i]) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}(t).$$

$$b)\ (M, s) \models \varphi[t_j/x_i] \text{ ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}(t_j)]) \models \varphi.$$

Demonstraţie: [*prin inducţie pe complexitatea termenilor şi formulelor*]

a) *Demonstraţia pentru termeni.*

Cazul de bază. Termenul t are complexitatea 0, $c(t) = 0$. În această situaţie avem 2 cazuri, (I) $t = c_i$ şi (II) $t = x_i$. Să le considerăm pe rând.

(I) $t = c_i$. Prin urmare, $t[t_j/x_i] = c_i[t_j/x_i] = c_i$. [*substituţia termenilor*]

Aşadar,

$$(1)\ \bar{s}(t[t_j/x_i]) = \bar{s}(c_i) = c_i^M \ [\textit{definiţia 3.15}].$$

Acum, din $t = c_i$ rezultă

$$(2)\ \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}(t) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}(c_i) = c_i^M \ [\textit{definiţia 3.15}].$$

Din (1) şi (2) obţinem:

$$(\alpha)\ \bar{s}(c_i[t_j/x_i]) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}(c_i).$$

(II) $t = y_i$. În acest caz trebuie să distingem două subcazuri, în funcţie de identitatea sau nonidentitatea variabilei y_i cu variabila x_i.

(IIa) Dacă $y_i \neq x_i$, atunci $t[t_j/x_i] = y_i[t_j/x_i] = y_i$ [*substituţia termenilor*]

Prin urmare,

$$(3)\ \bar{s}(y_i[t_j/x_i]) = \bar{s}(y_i) = s(y_i) \ [\textit{definiţia 3.15}]$$

Dar,

$$(4)\ \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}(y_i) = s[x_i := \bar{s}(t_j)](y_i) = s(y_i).$$

[prima egalitate este conform *definiţiei 3.15*, iar ultima egalitate se obţine din faptul că $y_i \neq x_i$ şi *definiţia 3.15*].

Din (3) şi (4) obţinem:

$$(\beta_1)\ \bar{s}(y_i[t_j/x_i]) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}(y_i).$$

(IIb) Dacă $y_i = x_i$, atunci $t[t_j/x_i] = y_i[t_j/x_i] = x_i[t_j/x_i] = t_j$ [*substituţia termenilor*]
Prin urmare,

$$(5)\ \bar{s}\,(t[t_j/x_i]) = \bar{s}\,(t_j).$$

Dar,

$$(6)\ \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(y_i) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(x_i) = \bar{s}\,(t_j)$$

[prima egalitate decurge din $y_i = x_i$, a doua este conform conform *definiţiei 3.15*]
Din (5) şi (6) obţinem:

$$(\beta_2)\ \bar{s}\,(y_i[t_j/x_i]) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(y_i).$$

Din (β_1) şi (β_2) rezultă că, dacă $t = y_i$, atunci:

$$(\beta)\ \bar{s}\,(y_i[t_j/x_i]) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(y_i)$$

Pasul inductiv Termenul t are complexitatea $n > 0$, $c(t) = n$, $n > 0$. Presupunem (*ipoteza inducţiei*) că pentru toţi temenii t' astfel încât $c(t') < n$ are loc

$$(\mathrm{IH})\ \bar{s}\,(t'[t_j/x_i]) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(t'),$$

Din $c(t) = n$, $n > 0$, rezultă că t este de forma $f(t_1' \ldots t_n')$, unde $c(t_1'), \ldots, c(t_n') < n$.

$$(\mathrm{III})\ t = f(t_1' \ldots t_n'),\ c(f(t_1' \ldots t_n')) = n.$$

Acum,

$$t[t_j/x_i] = f(t_1' \ldots t_n')[t_j/x_i] = f(t_1'[t_j/x_i], \ldots, t_n'[t_j/x_i])\ [\textit{substituţia termenilor}]$$

Prin urmare,

$$(7)\ \bar{s}\,(t[t_j/x_i]) = \bar{s}\,(f(t_1'[t_j/x_i], \ldots, t_n'[t_j/x_i])) = f^M(\bar{s}\,(t_1'[t_j/x_i]), \ldots, \bar{s}\,(t_n'[t_j/x_i]))$$

[ultima egalitate se obţine conform *definiţiei 3.15*]
Pe de altă parte,

$$(8)\ \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(t) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(f(t_1' \ldots t_n')) =$$

$$f^M(\overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(t_1'), \ldots, \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(t_n'))$$

[prima egalitate este evidentă, a doua este conform *definiţiei 3.15*]
Din (7), (8) şi (IH) rezultă:

$$(\gamma)\ \bar{s}\,(f(t_1' \ldots t_n')[t_j/x_i]) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(f(t_1' \ldots t_n')).$$

Din (α), (β) şi (γ) rezultă că, pentru orice termen $t \in$ TERM,

$$\bar{s}\,(t[t_j/x_i]) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(t)$$

b) *Demonstraţia pentru formule.*

Cazul de bază. Formula φ are complexitatea 0, $c(\varphi) = 0$. În această situaţie φ are una dintre următoarele forme: (IV) $\varphi = P(t_1, ..., t_m)$, sau (V) $\varphi = (t_i = t_j)$.

(IV) $\varphi = P(t'_1 \ ... \ t'_n)$. În acest caz,

(1) $\varphi[t_j/x_i] = P(t'_1 \ ... \ t'_n)[t_j/x_i] = P(t'_1[t_j/x_i], \ldots, t'_n[t_j/x_i])$ [*substituţia formulelor*]

Acum, din (1) şi conform *definiţiei 3.16*, obţinem:

(2) $(M, s) \models \varphi[t_j/x_i]$ ddacă $(M, s) \models P(t'_1[t_j/x_i], \ldots, t'_n[t_j/x_i])$ ddacă

$$<\bar{s}\,(t'_1[t_j/x_i]), \ldots, \bar{s}\,(t'_n[t_j/x_i])> \in P^M.$$

Conform aceleaşi *definiţii 3.16* avem:

(3) $(M, s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]) \models \varphi$ ddacă $(M, s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]) \models P(t'_1 \ ... \ t'_n)$ ddacă

$$<\overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(t'_1), ..., \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(t'_1)> \in P^M$$

Conform cazului *a*) al teoremei ştim că:

(4) $\bar{s}\,(t_i[t_j/x_i]) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(t_i)$, pentru orice i, $1 \leq i \leq n$.

Prin urmare, din (2), (3) şi (4) rezultă că:

(δ) $(M, s) \models P(t'_1 \ ... \ t'_n)[t_j/x_i]$ ddacă $(M, s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]) \models P(t'_1 \ ... \ t'_n)$.

V) $\varphi = (t'_i = t'_j)$. În acest caz,

(5) $\varphi[t_j/x_i] = (t'_i[t_j/x_i] = t'_j[t_j/x_i])$ [*substituţia formulelor*].

Acum, din (5) şi conform *definiţiei 3.16* obţinem:

(6) $(M, s) \models \varphi[t_j/x_i]$ ddacă $(M, s) \models (t'_i[t_j/x_i] = t'_j \ \varphi[t_j/x_i])$

ddacă $\bar{s}\,(t'_i[t_j/x_i]) = \bar{s}\,(t'_j \ \varphi[t_j/x_i])$.

Conform aceleaşi *definiţii 3.16* avem:

(7) $(M, s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]) \models \varphi$ ddacă $(M, s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]) \models (t'_i = t'_j)$

ddacă $\overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(t'_i) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(t'_j)$

Conform cazului *a*) demonstrat mai sus ştim că:

$\bar{s}\,(t'_i[t_j/x_i]) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(t'_i)$ şi $\bar{s}\,(t'_j \ \varphi[t_j/x_i]) = \overline{s[x_i := \bar{s}(t_j)]}\,(t'_j)$.

Din (6), (7) şi ultimele două egalităţi rezultă că:

(ε) $(M, s) \models (t'_i = t'_j)\,[t_j/x_i]$ ddacă $(M, s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]) \models (t'_i = t'_j)$.

Pasul inductiv. Formula φ are complexitatea n, $c(\varphi) = n$, $n > 0$. Presupunem (*ipoteza inducţiei*), că pentru orice formulă ψ, astfel încât $c(\psi) < n$, are loc:

$$\text{(IH) } (M, s) \models \varphi[t_j/x_i] \text{ ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}\ (t_j)]) \models \varphi.$$

Acum, singurele forme pe care o formulă φ, de complexitate $n > 0$, le poate avea sunt: (VI) $\varphi = (\neg\psi)$; $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$; $\varphi = \forall x(\psi)$. Să considerăm cazurile pe rând:

(VI) $\varphi = (\neg\psi)$.

Cum $c(\psi) < c(\varphi)$ *ipoteza inducţiei* se aplică pentru formula ψ.

$$\text{(IH) } (M, s) \models \psi[t_j/x_i] \text{ ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}\ (t_j)]) \models \psi.$$

Să observăm că (IH) este echivalentă[17] cu:

$$\text{(IH')} (M, s) \not\models \psi[t_j/x_i] \text{ ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}\ (t_j)]) \not\models \psi.$$

$$(8)\ \varphi[t_j/x_i] = (\neg\psi[t_j/x_i])\ [\textit{substituţia formulelor}]$$

Acum, din (8) şi conform *definiţiei 3.16* obţinem:

$$(9)\ (M, s) \models \varphi[t_j/x_i] \text{ ddacă } (M, s) \models (\neg\psi[t_j/x_i])$$

$$\text{ddacă } (M, s) \not\models \psi[t_j/x_i]$$

Conform aceleaşi definiţii *3.16* ştim că:

$$(10)\ (M, s[x_i := \bar{s}\ (t_j)]) \models \varphi \text{ ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}\ (t_j)]) \models (\neg\psi)$$

$$\text{ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}\ (t_j)]) \not\models \psi.$$

Din $c(\psi) < c(\varphi)$ ştim (IH') este aplicabil formulei ψ.

Din (9), (10) şi (IH') avem:

$$(\theta)\ (M, s) \models (\neg\psi[t_j/x_i]) \text{ ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}\ (t_j)]) \models (\neg\psi).$$

(VII) $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$;

Cum $c(\psi) < c(\varphi)$ şi $c(\chi) < c(\varphi)$ *ipoteza inducţiei* se aplică formulelor ψ şi χ.

(IH_1) $(M, s) \models \psi[t_j/x_i]$ ddacă $(M, s[x_i := \bar{s}\ (t_j)]) \models \psi$, ceea ce e echivalent cu[18]:

$$(M, s) \not\models \psi[t_j/x_i] \text{ ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}\ (t_j)]) \not\models \psi.$$

şi

$$(IH_2)\ (M, s) \models \chi[t_j/x_i] \text{ ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}\ (t_j)]) \models \chi.$$

Acum,

$$(11)\ \varphi[t_j/x_i] = \psi[t_j/x_i] \rightarrow \chi[t_j/x_i]\ [\textit{substituţia formulelor}].$$

Din (11) şi conform *definiţiei 3.16* avem:

[17] Vezi nota 12.

[18] Din nou, vezi nota 12.

(12) $(M, s) \models \varphi[t_j/x_i]$ ddacă $(M, s) \models (\psi[t_j/x_i] \rightarrow \chi[t_j/x_i])$

ddacă $(M, s) \not\models \psi[t_j/x_i]$ sau

$(M, s) \models \chi[t_j/x_i]$.

Conform aceleaşi definiţii *3.16* avem:

(13) $(M, s[x_i:=\bar{s}(t_j)]) \models \varphi$ ddacă $(M, s[x_i:=\bar{s}(t_j)]) \models (\psi \rightarrow \chi)$

ddacă $(M, s[x_i:=\bar{s}(t_j)]) \not\models \psi$ sau

$(M, s[x_i:=\bar{s}(t_j)]) \models \chi$

Din (12), (13) (IH_1) şi (IH_2) avem:

(ι) $(M, s) \models (\psi \rightarrow \chi)[t_j/x_i]$ ddacă $(M, s[x_i:=\bar{s}(t_j)]) \models (\psi \rightarrow \chi)$.

(VIII) $\varphi = \forall x(\psi)$.

Acum, evaluarea substituţiei diferă în funcţie de următoarele situaţii: $x \neq x_i$, sau $x = x_i$. În cazul în care $x \neq x_i$ avem, din nou, două situaţii posibile: fie $x_i \notin \mathrm{VL}(\varphi)$, fie $x_i \in \mathrm{VL}(\varphi)$. Să le considerăm pe rând:

(VIIIa) Să presupunem că $x \neq x_i$ şi $x_i \notin \mathrm{VL}(\varphi)$.

În acest caz, substituţia se face în gol, mai precis, conform *lemei 3.2*, $\varphi[t_j/x_i] = \varphi$, de unde deducem că:

(14) $\varphi[t_j/x_i] = \forall x(\psi[t_j/x_i]) = \forall x(\psi) = \varphi$.

Din (14) şi *definiţia 3.16* obţinem:

(15) $(M, s) \models \varphi[t_j/x_i]$ ddacă $(M, s) \models \varphi$

Acum, s şi $s[x_i:=\bar{s}(t_j)]$ asignează aceleaşi valori tuturor variabilelor, mai puţin variabilei x_i. Însă $x_i \notin \mathrm{VL}(\varphi)$, de unde deducem că s şi $s[x_i:=\bar{s}(t_j)]$ asignează aceleaşi valori variabilelor libere ale lui φ, prin urmare, conform *lemei coincidenţei asignărilor* pentru formule,

(κ_1) $(M, s) \models \forall x(\psi)[t_j/x_i]$ ddacă $(M, s[x_i:=\bar{s}(t_j)]) \models \forall x(\psi)$.

(VIIIb) Să presupunem că $x \neq x_i$ şi $x_i \in \mathrm{VL}(\varphi)$. În acest caz,

(16) $\varphi[t_j/x_i] = \forall x(\psi)[t_j/x_i] = \forall x(\psi[t_j/x_i])$ [*substituţia formulelor*].

Din asumpţia că t_j *este substituibil lui* x_i în φ şi că $x_i \in \mathrm{VL}(\varphi)$, rezultă că $x \notin \mathrm{OV}(t_j)$ şi că t_j este substituibil lui x_i în ψ. Aşadar, conform cu (16) şi *definiţia 3.16*, avem:

(17) $(M, s) \models \varphi[t_j/x_i]$ ddacă $(M, s) \models \forall x(\psi[t_j/x_i])$

ddacă pentru orice $d \in D$, $(M, s[x:=d]) \models (\psi[t_j/x_i])$

Conform aceleaşi *definiţii 3.16*, avem

(18) $(M, s[x_i:=\bar{s}(t_j)]) \models \varphi$ ddacă $(M, s[x_i:=\bar{s}(t_j)]) \models \forall x(\psi)$.

ddacă pentru orice $d \in D$, $(M, s[x_i:=\bar{s}(t_j)][x:=d]) \models \psi$.

Conform *ipotezei inducţiei* ştim că,

$$(\text{IH})\ (M, s[x:=d]) \models (\psi[t_j/x_i]) \text{ ddacă } (M, s[x:=d][x_i := \overline{s[x:=d]}(t_j)]) \models \psi,$$

pentru orice $d \in D$.

Dar $x \notin \mathrm{OV}(t_j)$, de unde rezultă că $\bar{s}\,(t_j) = \overline{s[x:=d]}\,(t_j)$, pentru orice $d \in D$.

Din $\bar{s}\,(t_j) = \overline{s[x:=d]}\,(t_j)$, pentru orice $d \in D$, şi (IH) obţinem

(19) $(M, s[x:=d]) \models (\psi[t_j/x_i])$ ddacă $(M, s[x:=d]\,[x_i := \bar{s}\,(t_j)]) \models \psi$, pentru orice $d \in D$.

Din (17), (18) şi (19) rezultă:

$(M, s[x:=d]) \models (\psi[t_j/x_i])$ ddacă $(M, s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]\,[x:=d]) \models \psi$, pentru orice $d \in D$,

adică

$$(\kappa_2)\ (M, s) \models \forall x(\psi)[t_j/x_i] \text{ ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]) \models \forall x(\psi).$$

(VIIIc) Să presupunem că $x = x_i$. În acest caz,

$$(20)\ \varphi[t_j/x_i] = \forall x(\psi)[t_j/x_i] = \forall x(\psi) = \varphi\ [\textit{substituţia formulelor}].$$

Acum, conform *definiţiei 3.16* avem:

$$(21)\ (M, s) \models \varphi[t_j/x_i] \text{ ddacă } (M, s) \models \forall x(\psi).$$

Conform aceleaşi *definiţii 3.16* ştim că

$$(22)\ (M, s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]) \models \varphi \text{ ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]) \models \forall x(\psi)$$

Dar $x = x_i$, de unde rezultă că $x_i \notin \mathrm{VL}(\varphi)$, aşadar s şi $s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]$ asignează aceleaşi valori tuturor variabilelor libere ale lui φ, prin urmare, conform *lemei coincidenţei asignărilor* pentru formule,

$$(\kappa_3)\ (M, s) \models \forall x(\psi)[t_j/x_i] \text{ ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]) \models \forall x(\psi).$$

Din (κ_1), (κ_2) şi (κ_3) rezultă că pentru întreg cazul (VIII) avem:

$$(\kappa)\ (M, s) \models \forall x(\psi)[t_j/x_i] \text{ ddacă } (M, s[x_i := \bar{s}\,(t_j)]) \models \forall x(\psi).$$

Din (ι), (θ) şi (κ) rezultă că pasul inductiv este demonstrat, şi, odată cu pasul inductiv teorema este demonstrată.

În continuare vom explica şi formula o lemă care priveşte procedeul substituţiei, la care vom apela în demonstraţia de completitudine. Să notăm în acest sens, că, în general, $\varphi[y/x][x/y] \neq \varphi$. Fie, de pildă, formula: $\varphi = \neg\forall x(x = y)$. Să vedem care este rezultatul operaţiilor succesive de substituţie: $\varphi[y/x][x/y]$.

$\varphi[y/x] = \neg\forall x(x = y)[y/x] = \neg\forall x(x = y)$

$\varphi[y/x][x/y] = \neg\forall x(x = y)[y/x][x/y] = \neg\forall x(x = y)[x/y] = \neg\forall x(x = x)$.

Evident, $\varphi = \neg\forall x(x = y) \neq \neg\forall x(x = x) = \varphi[y/x][x/y]$.

Acum, există totuşi situaţii în care $\varphi = \varphi[y/x][x/y]$, iar lema de mai jos caracterizează una dintre aceste situaţii.

Lema 3.3: Fie σ o signatură, $\varphi \in$ FORM, $x, y \in Var$. Dacă y nu are nici o ocurenţă în φ, atunci y este substituibil lui x în φ şi $\varphi[y/x][x/y] = \varphi$.

Pentru a demonstra această lemă este mai convenabil să stabilim în prealabil un rezultat privind substituţia succesivă $[y/x][x/y]$ în cazul termenilor.

Lema 3.4: Fie σ o signatură, $t \in$ TERM, $x, y, z \in Var$: Dacă $y \notin$ OV$\{t\}$, atunci $t[y/x][x/y] = t$.

Observaţi că fără condiţia $y \notin$ OV$\{t\}$ acest lucru nu este valabil. Fie, de pildă termenul $t = y$. În acest caz, $t[y/x] = y$ şi, prin urmare $t[y/x][x/y] = x$. Evident, $t \neq t[y/x][x/y]$. Dar, dacă $y \notin$ OV$\{t\}$, atunci $t[y/x][x/y] = t$. Să demonstrăm acest fapt.

Demonstraţie [*prin inducţie pe complexitatea termenilor*]

Conform proprietăţii de descompunere unică, termenii signaturii σ au doar una dintre următoarele forme $t = c_i$, $t = x_i$ sau $t = f(t_1 \ldots t_m)$.

Cazul de bază

a) $t = c$, $c(t) = 0$.

În acest caz, $t[y/x][x/y] = c = t$.

b) $t = z$, $c(t) = 0$, z este o variabilă oarecare, identică sau nu cu x, y.

În acest caz ar trebui să distingem trei situaţii posibile: i) când $z = x$, ii) când $z = y$ şi cînd iii) $z \neq x, y$. Condiţia ca $y \notin$ OV$\{t\}$ exclude situaţia ii), situaţie în care, aşa cum am văzut puţin mai sus, $t \neq t[y/x][x/y]$. Să verificăm, aşadar celelalte două situaţii:

i) $z = x$. În consecinţă, $t[y/x] = z[y/x] = x[y/x] = y$ iar $t[y/x][x/y] = y[x/y] = x = z = t$.

iii) $z \neq x, y$. În consecinţă, $t[y/x] = z[y/x] = z$ iar $t[y/x][x/y] = z[x/y] = z = t$.

Pasul inductiv

Conform proprietăţii de descompunere unică a termenilor există un singur caz pe care trebuie să-l stabilim în pasul inductiv.

c) $t = f(t_1 \ldots t_n)$, $c(t) = n$, $n > 0$

Conform ipotezei inducţiei, presupunem că pentru toţi termenii t_i, $1 \leq i \leq n$ are loc:

$$\text{(IH) } t_i[y/x][x/y] = t_i.$$

Acum, $t[y/x][x/y] = f(t_1 \ldots t_n)[y/x][x/y]$

$= f(t_1[y/x][x/y] \ldots t_n[y/x][x/y])$ [*definiţia substituţiei*]

$= f(t_1 \ldots t_n)$ [(IH)]

Cu ajutorul acestei leme putem demonstra foarte uşor *lema 3.3*, printr-o aplicare de rutină a inducţiei pe mulţimea formulelor sau complexitatea acestora. (vezi exerciţiul 1)

Corolar 3.3: Fie σ o signatură, $\varphi \in$ FORM, $x \in Var$, $c \in C$. Dacă c nu are nici o ocurenţă în φ, atunci c este substituibil lui x în φ şi $\varphi[c/x][x/c] = \varphi$

Demonstraţie: similară demonstraţiei *lemei 3.3* (vezi exerciţiul 2).

UN SISTEM AXIOMATIC AL LOGICII DE ORDINUL I

După cum sugerează articolul nehotărât din titlul secţiunii există mai multe modalităţi echivalente de a axiomatiza LOI. În continuare, vom prezenta un sistem axiomatic al LOI divizat în două grupe de axiome şi o mulţime de reguli de derivare. Cele două grupe de axiome sunt cunoscute drept *axiome logice* (Λ) şi, destul de neinspirat, dar cât se poate de evident, *axiome non-logice* (Σ). În funcţie de preferinţele sau scopurile autorilor, conţinutul axiomelor logice şi a regulilor de derivare diferă. Unii autori preferă sisteme bogate în axiome logice şi cu puţine reguli de derivare, cum este de pildă sistemul axiomatic al calculului predicatelor dezvoltat de Enderton[19], alţii, dimpotrivă, preferă sisteme în care există infinit de multe reguli de derivare, iar axiomele se reduc la câteva scheme. În continuare, vom opta pentru un sistem axiomatic bogat în axiome logice din simplul motiv că această opţiune facilitează mult demontraţiile ulterioare, fapt care este în concordanţă cu abordarea acestui volum, respectiv de a prezenta într-un mod riguros, dar comprehensiv rezultatele metateoretice de carcaterizare a LOI.

Axiomele logice (Λ)

Se obişnuieşte ca axiomele logice să se împartă în trei categorii:

I. *Axiome propoziţionale*:

În această categorie intră toate formulele care se obţin prin substituţia variabilelor propoziţionale dintr-o tautologie a calculului propoziţional cu formule din limbajul logicii de ordinul I[20].

[19] Herbert B. Enderton [2001].
[20] Substituţia trebuie, evident, să respecte menţiunile făcute în capitolul de calculul propoziţiilor.

De exemplu, fie tautulogia: $T = ((p_1 \to p_2) \to ((\neg p_2) \to (\neg p_1)))$. Substituind p_1 şi p_2 cu $(f(x) = f(y))$, respectiv $P(x)$ obţinem:
$T[p_0/(f(x) = f(y)), p_1/P(x)] = (((f(x) = f(y)) \to P(x)) \to ((\neg P(x)) \to (\neg(f(x) = f(y)))))$.

Pentru a face tehnic precis acest procedeu de obţinere a axiomelor propoziţionale avem la dispoziţie câteva strategii. Una dintre ele este să definim o operaţie de substituţie în aşa fel încât să permitem substituirea variabilelor propoziţionale cu formule ale limbajului logicii de ordinul I. O altă strategie, dezvoltată de Enderton, constă în diviziunea mulţimii FORM în două submulţimi, a formulelor prime – care cuprind formulele atomare şi cele prefixate de cuantificatorul universal – şi, evident, a celor neprime. Mai departe, peste mulţimea formulelor prime definim cele două operaţii $f_\neg$, şi $f_\to$. În acest fel, orice tautologie a calculului propoziţiilor este o axiomă propoziţională, obţinută fără intermedierea operaţiei de substituţie, pentru că, evident, tautologiile obţinute sunt deja formulate în limbajul logicii de ordinul I. Nu vom insista asupra acestor strategii, cititorul este încurajat să opteze pentru una dintre ele.

II. Axiomele identităţii

I_1. $x = x$, pentru orice $x \in Var$.
I_2. $((x_i = y) \to (f(x_1, .., x_i, .., x_n) = f(x_1, .., y, .., x_n)))$, $1 \le i \le n$, $x_1, ..., x_n, y \in Var$, $f \in Fţ$.
I_3. $((x = y) \to (\varphi[x/x_i] \to \varphi[y/y_i])$, $x, x_i, y, y_i \in Var$, $x_i, y_i \in VL(\varphi)$, $\varphi \in$ FORM_ATOM.

III. Axiomele cuantificatorilor

Instanţierea Universală (*UI*): $\forall x(\varphi) \to \varphi[t/x]$, dacă t este substituibil lui x în φ.
Distributivitatea cuantificatorului universal: $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x(\varphi) \to \forall x(\psi))$

Regulile de derivare:

Vom formula regulile de derivare astfel încât să le putem utiliza fără modificări în contextul mai larg al deducţiilor:

Modus ponens [*mp*]: Dacă φ şi $(\varphi \to \psi)$ au fost derivate dintr-o mulţime de asumpţii $\Gamma \subseteq$ FORM, atunci ψ poate fi derivată.

Generalizarea universală [*UG*]: Dacă φ a fost derivată dintr-o mulţime de asumpţii $\Gamma \subseteq$ FORM în care nu apare liberă variabila x, atunci $\forall x(\varphi)$ poate fi derivată din Γ.

Axiomele nonlogice (Σ)

Axiomele nonlogice sunt o mulţime de formule care caracterizează un anumit domeniu de studiu, cum sunt, de exemplu, axiomele teoriei grupurilor, sau o mulţime de formule care intenţional, cel puţin, urmăreşte să descrie o anumită structură, cum sunt axiomele aritmeticii Peano. În demonstraţiile care urmează, alegerea unor axiome nonlogice particulare este neesenţială, astfel încât menţiunile la această mulţime au un caracter complet general, ca la o mulţime de formule exprimate în deplină rigoare sintactică în cadrul unei signaturi σ.

Definiţie 3.25: (*deducţie*) Spunem că o σ-formulă φ este deductibilă dintr-o mulţime Γ de σ-formule şi notăm $\Gamma \vdash \varphi$ dacă există un şir $<\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3,..., \varphi_n>$, cu $\varphi_n = \varphi$ astfel încât pentru orice $1 \le k \le n$,

i) $\varphi_k \in \Gamma$ sau
ii) $\varphi_k \in \Lambda$ sau
iii) φ_k a fost obţinut din φ_i şi φ_j, unde $\varphi_j = (\varphi_i \rightarrow \varphi_k)$, $i, j < k$, prin aplicarea regulii *modus ponens* sau
iv) φ_k a fost obţinut din φ_j, $j < k$ prin regula *generalizării universale*, $\varphi_k = \forall x(\varphi_j)$.

În scopul unei lizibilităţii mai mari a textului vom presupune că formulele şi mulţimile de asumpţii menţionate în continuare sunt întotdeauna exprimate în cadrul unei signaturi fixate, σ, iar Γ este o mulţime de σ-formule, aşadar vom eluda menţionarea acestor aspecte.

Să notăm cu $\perp$ o contradicţie oarecare în sistemul logic dezvoltat de noi. Pentru convenienţă să stabilim că $\perp = (\forall x(x = x) \wedge (\neg \forall x(x = x)))$, dar $\perp$ poate fi orice altă contradicţie a logicii de ordinul I.

Definiţie 3.26: (*consistenţă sintactică*): O mulţime de formule Γ este *consistentă sintactic* ddacă nu există nici o formulă φ astfel încât $\Gamma \vdash \varphi$ şi $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Corelativ, spunem că o mulţime de formule Γ este *inconsistentă* ddacă nu este consistentă.

În conformitate cu *lema echivalenţei definiţiilor* din calculul propoziţional, a cărei validitate se păstrează şi în logica de ordinul I [adaptările demonstraţiilor – în cazul în care sunt necesare – pentru sistemul descris mai sus sunt minore], vom folosi, în funcţie de convenienţă, oricare dintre definiţiile echivalente. De pildă, putem echivala definiţia consistenţei/inconsistenţei cu următoarea definiţei:

O mulţime de formule Γ este *consistentă* ddacă $\Gamma \nvdash \perp$. Corelativ, spunem că o mulţime de formule Γ este *inconsistentă* ddacă $\Gamma \vdash \perp$.

Să precizăm, în continuare, câteva proprietăţi şi teoreme de caracterizare a relaţiei de deductibilitate. Menţionăm că proprietăţile relaţiei de deductibilitate din calculul propoziţional exprimate prin 'regulile' CUT, AS şi THIN se păstrează în logica de ordinul I ca metateoreme de caracterizare a relaţiei de deductibilitate $\vdash$ (vezi exerciţiul 3).

Să observăm că adoptarea ipotezei că mulţimile de asumpţii Γ, Δ etc sunt formate exclusiv din propoziţii (sau formule închise) ale limbajului de ordinul I considerat nu viciază[21] deducţiile obţinute în absenţa ei. Sensul *teoremei 3.6* este de a preciza această observație. În acest scop, să definim ce este închiderea universală a unei formule oarecare.

Definiţie 3.27: Fie $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ o formulă oarecare cu variabilele libere x_1, x_2, ..., x_n. Notăm prin φ^c formula $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n(\varphi(x_1, x_2, ..., x_n))$. Dacă Γ este o mulţime de formule, atunci definim $\Gamma^c = \{\varphi^c / \varphi \in \Gamma\}$.

Teorema 3.6: Fie Γ o mulţime de formule şi φ o formulă astfel încât $\Gamma \vdash \varphi$. În aceste condiţii, $\Gamma^c \vdash \varphi$.

Demonstraţie: Fie $<\varphi_1, ..., \varphi_n>$, $\varphi_n = \varphi$, deducţia lui φ din Γ. Să remarcăm că pentru orice φ^c, $\varphi^c \vdash \varphi$, prin *UI*, de unde deducem că $\Gamma^c \vdash \varphi_i$, pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, prin aplicarea *UI*. Pentru a construi o deducţie a formulei φ din Γ^c deducem, într-un prim pas, $\Gamma^c \vdash \varphi_i$, pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, iar în al doilea pas copiem deducţia $<\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n = \varphi>$ în continuare . Ceea ce rezultă este $\Gamma^c \vdash \varphi$.

Morala *teoremei 3.6* este că orice poate fi dedus dintr-o mulţime care conţine formule libere, poate fi dedus dintr-o mulţime care conţine închiderea universală a acestora, aşadar, putem să ne restrângem atenţia la mulţimi care conţin doar propoziţii, fără a pierde ceva esenţial. Semnificaţia rezultatului de mai sus devine transparentă în demonstraţia *lemei existenţei unui model*, a cărei miză este de a arăta că orice mulţime consistentă de formule Γ are un model, mai precis că fiecare formulă $\varphi \in \Gamma$ este sastisfiabilă în orice asignare *s*, ceea ce echivalează cu considerarea închiderii universale a mulţimii Γ^c. Aşadar, în demonstraţia completitudinii sistemului axiomatic prezentat mai sus *via lema existenţei unui model* vom considera doar mulţimi Γ de propoziţii. Dar până atunci, să notăm câteva rezultate pe care le vom utiliza în demonstrtaţia de completitudine.

[21] Această modalitate este folosită, de pildă, în demontratoarele automate de teoreme sau în softuri destinate învătării deducţiei naturale în logica de ordinul I.

Teorema 3.7: *Teorema generalizării pe constante*: Dacă $\Gamma \vdash \varphi$ şi c este o constantă care nu apare în Γ, atunci există o variabilă x care nu apare nici în φ, nici în Γ, astfel încât $\Gamma \vdash \forall x(\varphi[x/c])$, iar în deducţia lui $\forall x(\varphi[x/c])$ din Γ nu apare constanta c.

Demonstraţie [*prin inducţie pe lungimea deducţiei*]: Fie $<\varphi_1, ..., \varphi_n>$, $\varphi_n = \varphi$, deducţia formulei φ din Γ şi x o variabilă care nu apare în Γ şi nici în vreuna dintre formulele $\varphi_1, ..., \varphi_n$. Ceea ce vrem să demonstrăm este că secvenţa $<\varphi_1[x/c], ..., \varphi_n[x/c]>$ constituie o deducţie a formulei $\varphi[x/c]$ din $\Gamma[x/c]$. În acest scop, vom aplica inducţia pe lungimea deducţiei.
Cazul de bază ($n = 1$): în acest caz (I) $\varphi_1 \in \Gamma$ sau (II) $\varphi_1 \in \Lambda$. Să le considerăm pe rând:
(I) $\varphi_1 \in \Gamma$ Pentru că $c \notin \Gamma$, $\varphi_1[x/c] = \varphi_1$ [substituţia se face în gol].
(II) $\varphi_1 \in \Lambda$. În acest caz $\varphi_1[x/c] \in \Lambda$ [substituţia ocurenţelor unei constante dintr-o axiomă logică cu o variabilă este tot o axiomă logică].
Pasul inductiv: presupunem că pentru orice φ_k, $k < n$, secvenţa $<\varphi_1[x/c], ..., \varphi_k[x/c]>$ reprezintă o deducţie din Γ în care nu apare constanta c şi să arătăm că pentru $k = n$ rezultatul se păstrează. În acord cu definiţia deducţiei, φ_n poate fi obţinută în patru moduri distincte, (*a*) $\varphi_n \in \Gamma$, (*b*) $\varphi_n \in \Lambda$, (*c*) φ_n a fost obţinut din φ_i, φ_j, unde $\varphi_j = (\varphi_i \rightarrow \varphi_n)$, $i, j < n$, prin aplicarea regulii *mp*, (*d*) φ_n a fost obţinut din φ_j, $j < n$, prin *UG*. Cazurile (*a*) şi (*b*) sunt identice cu (I) şi (II) din cazul de bază.
Cazul (*c*) Din ipotezei inducţiei rezultă că (*i*) $\Gamma \vdash \varphi_i[x/c]$ şi (*ii*) $\Gamma \vdash (\varphi_i \rightarrow \varphi_n)[x/c]$ (i, $j < n$). Dar $(\varphi_i \rightarrow \varphi_n)[x/c] = (\varphi_i[x/c] \rightarrow \varphi_j[x/c])$, de unde rezultă că (*iii*) $\Gamma \vdash (\varphi_i[x/c] \rightarrow \varphi_n[x/c])$. Din (*i*) şi (*iii*) rezultă, conform regulii *mp*, $\varphi_n[x/c]$.
Cazul (*d*) Din presupunerea că variabila x nu apare în secvenţa $<\varphi_1, ..., \varphi_n>$, rezultă că φ_n este de forma $\forall y(\varphi_j)$, $y \neq x$, $j < n$. Din ipoteza inducţiei rezultă că $\Gamma \vdash \varphi_j[x/c]$. Aplicarea regulii *UG* pasului $\Gamma \vdash \varphi_j[x/c]$ rămâne legitimă (substituţia constantei c cu variabila $x \neq y$ nu afectează aplicarea regulii *UG*), de unde rezultă că $\Gamma \vdash \forall y(\varphi_j[x/c)]$, adică $\varphi_n[x/c]$, conform definiţiei substituţiei.

Ceea ce am demonstrat până acum este că putem transforma deducţia $\Gamma \vdash \varphi$ în deducţia $\Gamma \vdash \varphi[x/c]$. Pentru a infera că $\Gamma \vdash \forall x(\varphi[x/c])$ este suficient să aplicăm regula *UG* ultimului pas al deducţiei $<\varphi_1[x/c], ..., \varphi_n[x/c]>$, $\varphi_n[x/c] = \varphi[x/c]$, aplicare legitimată de presupunerea că x nu apare ca variabilă liberă în Γ.

Teorema 3.8: *Teorema deducţiei*: Dacă $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ atunci $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$.

Demonstraţie: Conţine un caz în plus faţă de demonstraţia corespunzătoare din calculul propoziţional aşa încât îi lăsăm cititorului plăcerea de a demonstra acest caz (vezi exerciţiul 4)

Lema 3.5: Axiomele propoziţionale sunt valide.

Demonstraţie: În acord cu cele spuse la începutul acestui capitol, orice tautologie a calculului propoziţional rămâne validă în logica de ordinul I. În orice structură M şi asignare s o tautologie formulată în limbajul logicii de ordinul I depinde doar de valoarea de adevăr a subformulelor şi de semantica operatorilor $\rightarrow$ şi $\neg$ care este aceeaşi cu cea din calculul propoziţional. Lăsăm demonstraţia acestei leme în seama cititorului.

Lema 3.6: Axiomele identităţii sunt valide.

Demonstraţie: Vom considera doar I_2, celelalte cazuri fiind similare.
Fie o structură oarecare M şi o asignare oarecare s: $Var \rightarrow D$. Trebuie să demonstrăm că

$$(M, s) \models ((x_i = y) \rightarrow (f(x_1, .., x_i, .., x_n) = f(x_1, .., y, .., x_n))).$$

Acum, fie $(x = y)$ este satisfiabilă în (M, s), fie nu. Să considerăm pe rând cele două alternative.

(I) Să presupunem că $(x_i = y)$ nu este satisfiabilă în (M, s), adică, $(M, s) \not\models (x_i = y)$. În acest caz, conform definiţiei satisfiabilităţii unei formule de tipul $(\psi \rightarrow \chi)$, putem infera:

$$(M, s) \models ((x_i = y) \rightarrow (f(x_1, .., x_i, .., x_n) = f(x_1, .., y, .., x_n))).$$

(II) Să presupunem că $(x_i = y)$ este satisfiabilă în (M, s), adică

(1) $s(x_i) = s(y)$ [definiţia satisfiabilităţii]

Acum,

(2) $(M, s) \models (f(x_1, .., x_i, .., x_n) = f(x_1, .., y, .., x_n))$ ddacă

$(\bar{s}\ (f(x_1, .., x_i, .., x_n)) = \bar{s}\ (f(x_1, .., y, .., x_n))$ [definiţia satisfiabilităţii]

ddacă $f^M(\bar{s}\ (x_1), .., \bar{s}\ (x_i), .., \bar{s}\ (x_n)) = f^M(\bar{s}\ (x_1), .., \bar{s}\ (y), .., \bar{s}\ (x_n))$ [definiţia valorii unui termen].

ddacă $f^M(s(x_1), .., s(x_i), .., s(x_n)) = f^M(s(x_1), .., s(y), .., s(x_n))$. [definiţia extensiei $\bar{s}$]

Dar $s(x_k) = s(x_k)$, $1 \leq k \leq n$, $k \neq i$, $s(x_i) = s(y)$ [din (1)] şi f^M este o funcţie, aşadar

$$f^M(s(x_1), .., s(x_i), .., s(x_n)) = f^M(s(x_1), .., s(y), .., s(x_n)),$$

de unde rezultă că

$$(M, s) \models (f(x_1, .., x_i, .., x_n) = f(x_1, .., y, .., x_n)).$$

Aşadar, dacă $(M, s) \models (x_i = y)$, atunci $(M, s) \models (f(x_1, .., x_i, .., x_n) = f(x_1, .., y, .., x_n))$. Din asumpţiile că structura M şi asignarea s sunt arbitrare rezultă că

$$\models ((x_i = y) \rightarrow (f(x_1, .., x_i, .., x_n) = f(x_1, .., y, .., x_n))).$$

Lema 3.7: Axiomele cuantificatorilor sunt valide.

Demonstraţie: Vom demonstra doar axioma instanţierii universale (*UI*), respectiv că $\models \forall x(\varphi) \rightarrow \varphi[t/x]$, dacă t este substituibil lui x în φ, celelalte cazuri fiind similare.

Fie o structură oarecare M şi o asignare oarecare s. Trebuie să demonstrăm că:

$$(M, s) \models \forall x(\varphi) \rightarrow \varphi[t/x], \text{ dacă } t \text{ este substituibil lui } x \text{ în } \varphi.$$

Pentru că vrem să demonstrăm validitatea unei implicaţii vom aborda strategia abordată în demonstraţia validităţii axiomei identităţii I_2, respectiv vom demonstra că în condiţia în care t este substituibil lui x în φ, din presupunerea că $(M, s) \models \forall x(\varphi)$, decurge că $(M, s) \models \varphi[t/x]$. (De fapt, acest caz reprezintă singura miză a demonstraţiei, cazul în care antecedentul nu este satisfiabil este trivial şi, ca atare, spre deosebire de demonstraţia validităţii lui I_2, îl vom exclude). Să asumăm, aşadar, că t este substituibil lui x în φ şi fie $(M, s) \models \forall x(\varphi)$. În acest caz,

(1) $(M, s) \models \forall x(\varphi)$ ddacă, pentru orice $d \in D$, $(M, s[x:=d]) \models \varphi$ [def. *satisfiabilităţii*]

În calitate de termen, t numeşte un obiect din D, prin urmare există un obiect $d_t \in D$ care este valoarea lui $\bar{s}(t)$, adică $\bar{s}(t) = d_t$. Cum $(M, s[x:=d]) \models \varphi$ are loc pentru orice $d \in D$, are loc şi pentru obiectul particular d_t, care este valoarea termenului t în asignarea s, adică:

$$(2)\ (M, s[x:=\bar{s}(t)]) \models \varphi.$$

Dar, pentru că t este substituibil lui x în φ putem aplica teorema substituţiei[22] şi obţinem:

$$(3)\ (M, s) \models \varphi[t/x]$$

Aşadar, pentru orice asignare s astfel încât $(M, s) \models \forall x(\varphi)$ obţinem $(M, s) \models \varphi[t/x]$. Din arbitrarietatea alegerii lui M şi s rezultă că $\models \forall x(\varphi) \rightarrow \varphi[t/x]$.

Lema 3.8: Axiomele logice sunt valide ($\models \Lambda$).

Demonstraţie: rezultă din *lema 3.5*, *lema 3.6* şi *lema 3.7*.

[22] Trebuia să folosim teorema undeva, nu-i aşa?

Teorema 3.9: *Teorema de corectitudine*: Dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \models \varphi$.

Demonstraţie: (prin inducţie pe lungimea deducţiilor, $l_d = <\varphi_1, ..., \varphi_n> = n$, $\varphi_n = \varphi$)

Cazul de bază: deducţia are lungimea $l_d = 1$, adică $\varphi_1 \in \Gamma$ sau $\varphi_1 \in \Lambda$.

În cazul în care $\varphi_1 \in \Gamma$, evident $\Gamma \models \varphi_1$.

În cazul în care $\varphi_1 \in \Lambda$, din *lema 3.8* rezultă că $\models \varphi_1$, prin urmare, conform cu THIN, $\Gamma \models \varphi_1$.

Paul inductiv: (IH) presupunem că pentru orice $i\ j, < k$ dacă $\Gamma \vdash \varphi_i$, $\Gamma \vdash \varphi_j$, atunci $\Gamma \models \varphi_i$, $\Gamma \models \varphi_j$. Avem de considerat două cazuri: (I) când φ_k a fost obţinut din φ_i, φ_j, $i\ j, < k$, prin aplicarea regulii *modus ponens* şi (II) φ_k a fost obţinut din φ_j prin regula *generalizării universale*

(I) În cazul în care φ_k a fost obţinut din φ_i, $\varphi_j = (\varphi_i \rightarrow \varphi_k)$, $i\ j, < k$ prin aplicarea regulii *modus ponens*, avem, conform (IH):

i) $\Gamma \models \varphi_i$,

ii) $\Gamma \models (\varphi_i \rightarrow \varphi_k)$.

Conform definiţiei satisfiabilităţii, $\Gamma \models (\varphi_i \rightarrow \varphi_k)$, ddacă:

iii) $\Gamma \not\models \varphi_i$ sau

iv) $\Gamma \models \varphi_k$.

Sub asumpţia consistenţei mulţimii Γ,cazul iii) este exclus de cazul i), prin urmare,

$$\Gamma \models \varphi_k$$

Dacă mulţimea Γ este inconsistentă, atunci, în mod trivial $\Gamma \models \varphi_k$.

(II) În cazul în care φ_k a fost obţinut din φ_j prin regula *generalizării universale* [caz în care φ_k este de forma $\forall x(\varphi_j)$, iar variabila x nu apare liberă în Γ], atunci, prin ipoteza inducţiei, avem:

(IH) Dacă $\Gamma \vdash \varphi_j$, atunci $\Gamma \models \varphi_j$.

Să asumăm, aşadar, 1) că x nu apare liberă în Γ, 2) că $\Gamma \models \varphi_j$ şi să demonstrăm 3) că $\Gamma \models \forall x(\varphi_j)$.

Fie M o structură oarecare, s o asignare oarecare astfel încât $(M, s) \models \varphi_j$. Pentru că x nu apare ca variabilă liberă în Γ deducem că pentru orice formulă $\psi \in \Gamma$, şi orice $d \in D$, $s[x:=d]$ şi s atribuie variabilelor libere din ψ aceleaşi valori. Conform *lemei coincidenţei asignărilor pentru formule* putem infera că $(M, s[x:=d]) \models \psi$, pentru orice $\psi \in \Gamma$ şi orice $d \in D$, aşadar, că

(3) pentru orice $d \in D$, $(M, s[x:=d]) \models \Gamma$.

Din (3) şi asumpţia 2) rezultă că

$$\text{pentru orice } d \in D,\ (M, s[x{:=}d]) \models \varphi_j, \text{ adică,}$$

$$(M, s) \models \forall\, x(\varphi_j)$$

Cum M şi s au fost arbitrare, rezultă că $\Gamma \models \varphi_k$.

Cazul de bază al teoremei a fost demonstrat iar din demonstraţia pentru (I) şi (II) rezultă că pasul inductiv este demonstrat, prin urmare am stabilit *teorema corectitudinii*.

Teoreme de caracterizare a logicii de ordinul I

În această secțiune efortul conceptual se va concentra asupra demonstrației *teoremei de completitudine*, unul dintre rezultatele care caracterizează logica de ordinul I, alături de *teorema de compactitate* şi *teoremele Löwenheim-Skolem*.

Teorema de completitudine a fost demonstrată de către cel mai mare logician al secolului trecut, Kurt Gödel[23], în teza sa de doctorat din 1929. Doi ani mai târziu Kurt Gödel avea să publice o teoremă cunoscută sub numele de *teorema de incompletitudine*[24] care va avea o carieră matematică şi filosofică fulminantă. Despre *teorema de incompletitudine* şi semnificaţiile acestei se discută şi astăzi, ceea ce probează, într-un anumit sens, profunzimea acestui rezultat. O discuţie serioasă asupra teoremei de incompletitudine necesită un volum aparte[25] aşa că amânăm această discuţie pentru un viitor volum II de logică matematică.

Modalitatea prin care vom demonstra teorema de completitudine a fost patentată de Leon Henkin[26] şi are câteva trăsături care o recomandă, în economia lucrării de faţă, drept candidatul ideal pentru demonstrarea completitudinii logicii de ordinul I:

---

[23] Demonstraţia teoremei de completitudine (subiectul lucrării de doctorat a lui Gödel) a fost publicată doar în 1930, vezi Kurt Gödel [1930].

[24] Kurt Gödel [1930] 'Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme, I.', în *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38: 173–198.

[25] Aşa cum atestă, de pildă, volumul lui Peter Smith [2013], *An introduction to Gödel's theorems*, Second edition, Cambrdige, MA: Cambridge University Press, 2013.

[26] Leon Henkin [1949a], 'The completeness of the first-order functional calculus' în *The Journal of Symbolic Logic* 14: 159-166.

a) tehnica demonstraţiei se extinde cu uşurinţă la logicile de ordin superior, de pildă la logica de ordinul II, unde oferă o semantică non-standard, cunoscută şi ca semantică-Henkin[27]
b) demonstraţia permite derivarea simplă a altor rezultate de caracterizare a logicii de ordinul I, respectiv a teoremei de compactitate – care se obține ca un corolar al completitudinii – și a teoremei Löwenheim-Skolem.
c) eleganţa demonstraţiei este, de asemenea, un atuu de neneglijat, alternativa reprezentată de demonstraţia originară a lui Gödel, de exemplu, fiind mai alambicată şi neintuitivă pentru un cititor fără o apetenţă matematică deosebită.

Mai precis, vom demonstra că în sistemul axiomatic prezentat are loc:

Teorema de completitudine: Dacă $\Gamma \models \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

Acum, conform *teoremei 3.6* ne putem restrânge atenția la mulțimi Γ de propoziții, așadar, în continuare, vom asuma că teoriile Γ sunt mulțimi de propoziții iar formulele φ sunt, de asemenea, propoziții.

Nu este greu de argumentat că teorema de completitudine este echivalentă cu următoarea lemă:

Lema 3.9: *Lema de existenţă a unui model*: Orice teorie consistentă Γ are un model *M*.

Suficienţa: Vom demonstra în continuare doar suficienţa echivalenţei (care, de fapt, e relevantă pentru demonstraţia de teoremei de completitudine).

Să presupunem că orice teorie consistentă Γ are un model şi că $\Gamma \models \varphi$. În aceste condiţii, orice model al lui Γ este un model al lui φ. Dacă orice model al lui Γ este un model al lui φ, atunci, sub asumpţia consistenţei lui Γ, rezultă că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu are nici un model. Din contrapusa *lemei de existenţă a unui model* rezultă că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este consistentă, adică există o formulă ψ astfel încât

1. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ şi
2. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$.

Dar atunci,

3. $\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \psi)$ [din 1. prin *teorema deducţiei*].
4. $\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \neg\psi)$ [din 2. prin *teorema deducţiei*].
5. $\Gamma \vdash ((\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\varphi)))$ [axiomă propoziţională plus THIN].
6. $\Gamma \vdash \varphi$. [din 3 şi 4 prin două aplicări succesive ale lui *mp*]

[27] Semantica Henkin a fost exploatată filosofic în argumentele privind indeterminarea referenţială a conceptelor matematice.

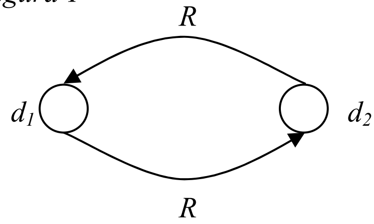
După cum ne arată argumentul de mai sus, miza întregii demonstraţii a teoremei de completitudine se reduce la demonstrarea lemei de existenţă a unui model. În acest sens, principala noastră sarcină va fi, în continuare, să construim un model pentru o mulţime consistentă Γ de propoziţii. Construcţia nu este trivială, aşa încât această demonstraţie va solicita atenţia dumneavoastră într-o măsură mult mai mare decât celelalte demonstraţii cu care ne-am întalnit. De asemena, construcţia se va desfăşura în câţiva paşi, corespunzători anumitor pericole ce însoţesc implementarea ideii din spatele construcţiei. Dar până la detaliile tehnice ale acestor paşi, să descriem intuitv care este ideea din spatele construcţiei.
Să presupunem că avem următoarea signatură, σ = $\{R\}$, unde R este o relaţie binară, şi următoarea mulţime de σ-formule – să o numim teoria T,

$$T = \{\exists x \exists y(\neg((\neg(x = y)) \rightarrow (\neg R(xy)))),\ \forall x \forall y R(xy)\}.$$

Prima formulă ne spune că există două elemente diferite ale domeniului care sunt relaţionate, iar cea de-a doua formulă că orice două obiecte ale domeniului sunt relaţionate. Acum, o structură care să constituie un model al acestei teorii T este structura $\langle N, < \rangle$ (unde N este mulţimea numerelor naturale iar < este relaţia de ordine strictă pe N), după cum se poate verifica. Dacă, însă, urmărim să construim modele simple ale teoriei T, ceea ce cu siguranţă vom urmări în demonstraţia teoremei existenţei unui model, atunci structura $\langle N, < \rangle$ este excesivă: cardinalul domeniul modelului este $\aleph_0$. Putem construi un model mai simplu, cu o cardinalitate mult mai mică; în acest scop, să ne uităm la prima formulă a teoriei T: prin cuantificatorii existenţiali şi negaţia identităţii aceasta asertează existenţa a două elemente diferite care să fie relaţionate. În consecinţă, domeniul modelului nostru trebuie să conţină două elemente relaţionate. Aceste elemente trebuie identificate, aşadar, fie d_1 şi d_2 două elemente ale domeniului D al modelului nostru M şi să stipulăm că acestea sunt relaţionate. Pentru o mai bună înţelegere a ce anume înseamnă construcţia unui model al primei formule să reprezentăm grafic cele două elemente d_1 şi d_2 şi relaţia R, între aceste elemente, ca în figura de mai jos (*figura 1*). Se observă că relaţia R a fost reprezentată grafic prin săgeţi.

Modelul descris în *figura 1* respectă prima formulă a teoriei noastre T. Acum, simpla observaţie pe care trebuie să o facem este că pentru a construi un model al celei de-a doua formule, respectiv cea care este prefixată exclusiv de cuantificatori universali, nu mai trebuie să identificăm, nici să introducem vreun element nou, doar să construim relaţiile necesare între elementele deja introduse pentru a face satisfiabilă formula prefixată universal, ceea ce, în cazul de faţă, este un *fait accompli*.

figura 1



Formal, însă, vom defini ca model al teoriei T structura

$$M = \langle D = \{d_1, d_2\}, R = \{\langle d_1, d_2 \rangle\}\rangle .$$

Morala exemplului de mai sus este simplă: adaugă valorilor constantelor signaturii elementele suficiente pentru a face satisfiabile formulele existenţiale şi defineşte această mulţime ca fiind domeniul modelului. Importanţa identificării elementelor care fac formulele cuantificate existenţial satisfiabile, în construcţia Henkin a unui model, se poate observa din faptul că aceste elemente au primit o denumire specială: se numesc *martorii* teoriei în modelul considerat.

Acum, să reluăm structura argumentului prin care am stabilit completitudinea calculului propoziţional prin metoda lui Henkin: ipoteza de la care porneam era existenţa unei mulţimi consistente Γ de formule a calculului propoziţiilor pe care o extindeam până la o mulţime maximal consistentă Δ. Raţiunea extensiei la o mulţime maximal consistentă era cât se poate de pragmatică: este mult mai uşor să construieşti un model al acestei extensii Δ decât un model al mulţimii Γ. Acelaşi tipar demonstrativ vom încerca să-l aplicăm şi cazul logicii de ordinul I: vom încerca să demonstrăm existenţa unui model al unei mulţimi consistente Γ de σ-formule, prin ricoşeu, în trei paşi

1) într-un prim pas prin includerea acestei mulţimi într-o extensie maximală consistentă Δ, apoi

2) prin construcţia unui model al acestei extensii, după care

3) prin 'curăţirea' modelului extensiei pentru a obţine, în sfârşit, un model al mulţimii Γ.

Ideea din spatele primului pas a fost detaliat prezentată în cazul calculului propoziţional, aşa că nu vom insista asupra acesteia. În schimb, vom prezenta ideea din spatele celui de-al doilea pas. În acest scop, să presupunem că am construit extensia maximală consistentă Δ a unei mulţimi Γ şi vedem cum anume vom construi un model al mulţimii Δ.

Obiectivul pe care îl urmărim, aşadar, este să construim un model $M = <D, i>$ astfel încât pentru fiecare $\varphi \in \Delta$ şi fiecare asignare s, $(M, s) \models \varphi$. Să ne reamintim că specificarea unui model presupune precizarea unui domeniu D şi a unei funcţii de interpretare i a simbolurilor signaturii. Acum, în loc să modelăm formulele mulţimii Δ în diferite domenii matematice, cum sunt cele ale teoriei mulţimilor, sau teoriei numerelor, ideea este să folosim chiar obiectele sintactice al mulţimii Δ, în construcţia modelului, mai precis, să considerăm drept elementele domeniului D σ-termenii[28] care nu conţin variabile. După cum subliniam mai sus, pentru a articula complet modelul nostru trebuie să specificăm funcţia de interpretare i a constantelor, simbolurilor funcţionale şi predicaţionale ale signaturii σ în domeniul D reprezentat de σ-termenii care nu conţin variabile libere. Să le considerăm pe rând.

În cazul *constantelor*, o alternativă care se impune prin simplitatea ei este de a defini interpretarea i într-un mod direct, autoreferenţial: $i(c_i) = c_i$.

Acum, interpretarea *simbolurilor funcţionale* presupune să atribuim tuturor simbolurilor funcţionale de aritate $n > 0$ din σ anumite funcţii f^M: $D^n \to D$. În consecinţă, principala provocare a interpretării simbolurilor funcţionale constă în descrierea modului în care se comportă aceste funcţii f^M, pe domeniul D. În acest scop, să definim orice funcţie f^M de aritate $n > 0$ în următorul mod:

$$f^M: D^n \to D$$

$$f^M(t_1, t_2, ..., t_n) = f(t_1\ t_2\ ...\ t_n),$$

unde $t_1, t_2, ..., t_n$ sunt σ-termeni care nu conţin variabile.

După cum se poate observa f^M este definită pe n-upluri de termeni şi ia ca valori termeni ai signaturii σ. Să considerăm, de pildă, signatura $\sigma = \{f, c_1, c_2\}$, unde f este un simbol funcţional binar, şi c_1, c_2 sunt două constante ale signaturii. În această situaţie, $i(f) = f^M$: $D^2 \to D$. Cum anume acţionează f^M? Păi, fie $c_1, c_2 \in D$. Interpretarea simbolului funcţional f este, conform definiţiei de mai sus, $f^M(c_1, c_2) = f(c_1\ c_2)$, aşadar funcţia f^M nu este decât termenul obţinut prin concatenarea simbolului funcţional f (a cărui interpretare este!) cu parantezele şi constantele c_1,

[28] Identificarea nu este chiar corectă, vezi în continuare prima problemă pe care o ridică identificarea brută a elementelor cu termenii modelului care nu conţin variabile libere şi soluţia acesteia, dar pentru expunerea comprehensivă a modului în care constituim domeniului modelului am făcut acest rabat.

c_2 (care sunt, evident, propriile lor interpretări). Observaţi prezenţa virgulei între argumentele c_1 şi c_2 ale funcţiei f^M şi lipsa acesteia din valoarea $f(c_1\ c_2)$. Pe scurt, rezultatul aplicării funcţiei f^M la termenii c_1 şi c_2 este termenul $f(c_1\ c_2)$.

Interpretarea *simbolurilor predicaţionale* presupune să atribuim fiecărui simbol predicaţional P, de aritate n, din σ, o relaţie $P^M \subseteq D^n$, identificată cu mulţimea compusă din n-uplurile de elemente din D pentru care P^M are loc. În consecinţă, definim $P^M \subseteq D^n$ astfel:

$$P^M = \{<t_1, t_2, ..., t_n> / P(t_1\ t_2\ ...\ t_n) \in \Delta\},$$

adică mulţimea n-tuplurilor de termeni din D pentru care P^M are loc este formată exact din n-uplurile de termeni care determină adevărul formulei $P(t_1\ t_2\ ...\ t_n)$.

Modelul M pe care tocmai l-am descris este deficitar, însă. Nici domeniul D format din σ-termenii care nu conţin variabile, nici interpretarea i pe care am specificat-o mai sus nu sunt adecvate în construcţia unui model pentru mulţimea Δ. Să începem prin a indica de ce anume interpretarea i este deficitară, apoi de ce nu este viabil un model construit exclusiv din σ-termenii care nu conţin variabile. Lecţiile pe care le vom însuşi din relevarea acestor dificultăţi şi soluţionarea lor ne vor indica modalitatea adecvată de a construi un model al mulţimii Δ.

1) Să presupunem că $\sigma = \{e, \circ\}$ este signatura teoriei grupurilor, unde e este constanta care denotă elementul neutru şi $\circ$ este un simbol funcţional binar iar axiomele teorie grupurilor sunt reunite în mulţimea Γ,

$\Gamma = \{\forall x \forall y \forall z(\circ(\circ(xy)\ z) = (\circ x \circ(yz))),\ \exists e \forall x(\circ(xe) = x),\ \forall x \exists y(\circ(xy) = e)\}$.

Observaţi că am scris axiomele teoriei grupurilor în notaţia oficială a limbajului nostru, care este diferită de notaţia matematică standard. Totuşi, diferenţele sunt uşor de sesizat, de pildă, ceea ce în nomenclatura oficială este termenul $\circ(xy)$, în notaţia standard este termenul $(x \circ y)$.

În acord cu cele spuse mai sus, să construim modelul mulţimii Γ pornind de la termenii signaturii σ care nu conţin variabile şi cu interpretarea i specificată mai sus. În acest sens, să presupunem că am construit extensia maximală consistentă Δ, $\Gamma \subseteq \Delta$. După cum cititorul se poate convinge, Δ conţine formula $(\circ(ee) = e)$. [Amintiţi-vă că $(\circ(ee) = e)$ reprezintă, în notaţia standard, formula $((e \circ e) = e)$]. Să vedem ce referent atribuire interpretarea i termenilor $\circ(ee)$ şi e. Conform interpretării i, $i(\circ) = \circ^M: D^2 \rightarrow D$, $\circ^M(t_i, t_j) = \circ(t_i\ t_j)$, unde t_i, t_j sunt σ-termeni care nu conţin variabile, $i(\circ(ee)) = \circ^M(ee) = \circ(ee)$ şi $i(e) = e$. Dar, din faptul că $(\circ(ee) = e) \in \Delta$

deducem că orice model al lui Δ atribuie acelaşi referent termenilor $\circ(ee)$ şi e . Însă, aşa cum am arătat mai sus, interpetarea i atribuie termenului $\circ(ee)$ referentul $\circ(ee)$ şi termenului e referentul e, iar cei doi referenţi sunt sintactic diferiţi, ceea ce înseamnă că formula $(\circ(ee) = e)$ este falsă în modelul constituit de noi pe baza ideilor prezentate mai sus.

Soluţia acestei probleme nu este complicată: ceea ce putem face în cazurile în care într-o mulţime trebuie să echivalăm elemente diferite este matematic trivial, mai precis să definim clase de echivalenţă peste acea mulţime. În consecinţă, elementele domeniului modelului pe care îl vom construi nu vor fi termenii care nu conţin variabile ci clasele de echivalenţă ale acestor termeni. Fie TERM', mulţimea σ-termenilor care nu conţin variabile. Vom defini relaţia de echivalenţă $\sim$ pe mulţimea TERM', în felul următor: $t_i \sim t_j$ ddacă $(t_i = t_j) \in \Delta$. Dar toate la timpul lor. Să vedem care este cea de-a doua problemă cu construcţia modelului pornind de la σ-termenii care nu conţin variabile libere.

2) Să presupunem că signatura σ nu are nici un simbol de constantă individuală. Dacă vi se pare puţin probabil să se întâmple aşa ceva, gândiţi-vă că signatura teoriei mulţimilor[29] în axiomatizarea Zermelo-Fraenkel cu axioma alegerii (prescurtată ZFC) constă dintr-un singur simbol relaţional $\sigma_{ZFC} = \{\in\}$. Sau, să presupunem că signatura $\sigma = \{P, c\}$ conţine un simbol predicaţional unar P şi o constantă c, iar $\Gamma = \{\exists x P(x), \neg P(c)\}$. Convingeţi-vă, ca exerciţiu, că Γ are un model, construind unul. Miza demersului nostru, însă, este să construim un model M al lui Γ respectând reţeta prezentată mai sus. În acest sens, observăm că modelul nostru $M = \langle\{c\}, i\rangle$ este constituit din domeniul $D = \{c\}$ şi intepretarea i, care trebuie să specifice interpretarea simbolurilor c şi P din σ în domeniul D. În acord cu cele spuse mai sus, $i(c) = c$. Să specificăm, în continuare, care este interpretarea simbolului predicaţional P în D. Pentru că $\neg P(c) \in \Gamma$ şi M este un model al lui Γ, rezultă că $\neg P(c)$ trebuie să fie adevărată în modelul M, aşadar $c \notin P^M$. Dar c este singurul element al mulţimii D, de unde rezultă că $i(P) = P^M = \emptyset$. În aceste condiţii, conform modelului M, Γ este inconsistentă semantic, în ciuda faptului că, aşa cum v-aţi putut convinge, există modele ale lui Γ. De ce Γ este evaluată ca o mulţime inconsistentă de formule în M? Să arătăm că responsabilitatea acestei evaluări a

[29] Iar importanţa teoriei mulţimilor pentru fundamentele matematicii şi în filosofia matematicii nu cred că poate fi uşor subestimată.

mulţimii Γ este cauzată de penuria domeniului D. Satisfiabilitatea formulei $\exists xP(x)$ implică existenţa unui σ-termen $t\in D$ care nu conţine variabile, astfel încât, în varianta $s[x:=t]$, a unei asignări oarecare s, $P(x)$ să fie satisfiabilă, formal $(M, s[x:=t]) \models P(x)$. Dar singurul termen al domeniului D este c, pentru care ştim că are loc $\neg P(c)$, aşadar, M nu poate fi un model al mulţimii Γ. Acum putem observa mai clar care anume este problema construcţiei modelului teoriei Γ din σ-termenii care nu conţin variabile libere. Iar răspunsul este simplu: lipsa martorilor pentru formula existenţială. Ştim că $\exists xP(x)$ trebuie să fie satisfiabilă, dar totuşi nici un termen $t\in \sigma$ nu este un martor pentru $\exists xP(x)$. Soluţia acestei probleme constă în a extinde signatura limbajului considerat cu constante noi, pe care să le putem folosi ca martori ai formulelor existenţiale. În acest sens, primul pas pe care îl vom face în demonstraţia lemei existenţei unui model va fi să extindem signatura σ.

Definiţie 3.28: Fie σ o signatură şi $C = \{c_i, i\in \mathbb{N}^*\}$ o mulţime de constante noi, mai precis, pentru orice $c_i\in C$, $c_i\notin \sigma$. Stipulăm că $\sigma_0 = \sigma$ şi definim $\sigma_1 = \sigma_0 \cup C$. În aceste condiţii, spunem că σ_1 este o extensie elementară a lui σ.

Acum, principala problemă care poate apărea cu această extensie este legată de consistenţa[30] mulţimii Γ. Nu avem garanţia că în signatura σ_1, mulţimea Γ îşi păstrează consistenţa. Motivul este simplu: în signatura σ_1 avem mai multe formule, prin urmare avem mai multe deducţii, iar una dintre aceste deducţii ar putea fi o contradicţie sau în contradicţie cu una dintre formulele deja demonstrate.

Lema 3.10: Fie σ o signatură, Γ o mulţime consistentă de σ-formule şi σ_1 extensia elementară a lui σ_0. În aceste condiţii, Γ rămâne consistentă şi în σ_1.

Demonstraţie (schiţă): Dacă Γ nu este consistentă în σ_1, atunci există o deducţie atât a unei formule φ cât şi a formulei $\neg\varphi$. Cum orice deducţie este un şir finit de formule din σ_1, rezultă că există o mulţime finită de constante $c_i\in C$ care apar în secvenţa deductivă. Din asumpţia că Γ este o mulţime consistentă de σ-formule, rezultă că nici una dintre constantele $c_i\in C$ care apar în secvenţa deductivă nu apare în Γ, ceea ce permite aplicarea succesivă a *teoremei generalizării pe constante* pentru a substitui constantele $c_i\in C$ din secvenţa deductivă cu variabile din

[30] Problema nu este trivială, după cum atestă discuţiile relative la extensiile conservative/neconservative ale unui limbaj.

signatura σ, obţinând, în acest fel, o derivare din Γ a formulelor $\varphi[x/c]$ şi $\neg\varphi[x/c]$, în signatura originară σ, ceea ce contrazice presupunerea iniţială.

Acum, din discuţia de mai sus este clar, cred, că intenţia extinderii signaturii cu o mulţime de constante noi este de a folosi aceste constante noi ca martori pentru propoziţiile existenţiale. Pentru a atinge acest scop, trebuie, însă, să ne asigurăm că fiecare propoziţie cuantificată existenţial are un martor. Legătura dintre propoziţiile cuantificate existenţial şi martorii corespunzători este realizată prin intermediul *axiomelor Henkin*. Pasul următor clarifică procedeul de construcţie a axiomelor Henkin şi ne asigură că fiecare propoziţie existenţială este asociată cu o constantă nouă, care nu a apărut în nici o altă formulă. De fapt, următoarea parte a demersului nostru constă în a proba câteva rezultate de contabilitate a constantelor şi axiomelor Henkin care ne asigură că vom asocia o constantă nouă fiecărei propoziţii cuantificate existenţial.

Din demonstraţia de tip Henkin a completitudinii calculului propoziţional ştim că formulele propoziţionale formează o mulţime numărabilă. Nu este greu de modificat argumentul din capitolul anterior pentru a produce o enumerare a formulelor unei signaturi σ iar cititorul este chiar încurajat să găsească o codificare similară celei din calculul propoziţional (vezi exerciţiul 5). Aşadar, fără a relua argumentele desfăşurate în primul şi cel de-al doilea capitol, fie o signatură σ şi o enumerare a formulelelor acestei signaturi. Din această enumerare selectăm doar propoziţiile de tipul $\exists x\varphi$ (vezi exerciţiul 6). Ceea ce vom obţine în acest fel este o listă a tuturor σ-propoziţiilor cuantificate existenţial:

$$\exists x\varphi_1,\ \exists x\varphi_2,\ ...,\ \exists x\varphi_n,\ ...$$

Formăm mulţimea *axiomelor Henkin*, H_1, în felul următor:

$$H_1\text{: } \{(\exists x\varphi_i \rightarrow \varphi_i[c_i/x]) / \exists x\varphi_i \text{ este o } \sigma\text{-propoziţie, iar } c_i \in C\}$$

Să notăm câteva proprietăţi ce decurg din modul în care utilizăm constantele c_i ca martori Henkin, încurajându-l pe cititor să demonstreze următoarele (vezi exerciţiile 7 și 8):

Fapt 1. Fiecare constantă c_i folosită ca martor în axiomele Henkin nu a apărut în nici una dintre formulele signaturii noastre originare σ, adică c_i nu apare în φ_i.

Fapt 2. Dacă o constantă c_i a fost utilizată ca martor al propoziţiei $\exists x\varphi_i$, atunci, c_i nu apare în vreuna dintre formulele $\exists x\varphi_k$ sau $\varphi_k[c_k/x]$, unde $k < i$.

Ce se întîmplă, însă, cu consistenţa unei mulţimi de formule căreia îi adăugăm axiomele Henkin? Nimic, după cum vom demonstra mai jos:

Definiţie 3.29: Fie σ o signatură, Γ o mulţime consistentă de σ-formule şi σ_1 o extensie elementară a lui σ. Stipulăm că $\Gamma_0 = \Gamma$ şi definim $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1$.

Lema 3.11: Γ_1 este consistentă.

Demonstraţie: [prin *reductio*] Să presupunem că Γ_1 este inconsistentă. Cum orice deducţie este finită, rezultă că doar un număr finit de formule din Γ_0 ($= \Gamma$) şi de axiome Henkin H_1 a fost folosit. Fie *n numărul minim* al axiomelor Henkin folosite şi să notăm această mulţime cu H_1^n. În consecinţă, există o formulă ψ astfel încât:

1. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^n \vdash \psi$ şi

2. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^n \vdash \neg\psi$.

Dar,

3. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash ((\exists x\varphi_n \to \varphi_n[c_n/x]) \to \psi)$ [din 1. prin *teorema deducţiei*].

4. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash ((\exists x\varphi_n \to \varphi_n[c_n/x]) \to (\neg\psi))$ [din 2. prin *teorema deducţiei*].

5. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash (((\exists x\varphi_n \to \varphi_n[c_n/x]) \to \psi) \to (((\exists x\varphi_n \to \varphi_n[c_n/x]) \to (\neg\psi)) \to \neg(\exists x\varphi_n \to \varphi_n[c_n/x])))$ [axiomă propoziţională + THIN].

6. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash \neg(\exists x\varphi_n \to \varphi_n[c_n/x])$. [din 3. 4. 5. printr-o dublă aplicare a lui *mp*]

7. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash (\neg(\exists x\varphi_n \to \varphi_n[c_n/x]) \to \exists x\varphi_n)$ [axiomă propoziţională + THIN]

8. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash (\neg(\exists x\varphi_n \to \varphi_n[c_n/x]) \to (\neg\varphi_n[c_n/x]))$ [axiomă propoziţională + THIN]

9. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash \exists x\varphi_n$ [*mp* din 6 şi 7]

10. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash (\neg\varphi_n[c_n/x])$ [*mp* din 6 şi 8]

11. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash (\neg\forall x\neg\varphi_n)$ [din 9, cf. definiţiei cuantificatorului $\exists$]

Fie, acum, o variabilă y care nu apare în φ_n şi nici în vreuna dintre formulele din $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^n$, adică o *variabilă nouă*[31]. Reamintim că, în contextul de faţă, *faptul 1* plus *faptul 2* ne asigură că c_n nu apare în $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1}$ nici în φ_n. Cu aceste precauţii,

12. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash \forall y(\neg\varphi_n[c_n/x][y/c_n])$ [din 10 şi *teorema generalizării pe constante*]

---

[31] Încercaţi să demonstraţi, ca exerciţiu, o astfel de variabilă există.

13 $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash \forall y(\neg\varphi_n[y/x])$ [din 12 şi *corolarul 3.3*]

14. $\forall y(\neg\varphi_n[y/x]) \vdash \forall y(\neg\varphi_n[y/x])$ [AS]

15. $\forall y(\neg\varphi_n[y/x]) \vdash (\forall y(\neg\varphi_n[y/x]) \rightarrow (\neg\varphi_n[y/x][x/y])$ [*UI*, cf. *lemei 3.3*]

16. $\forall y(\neg\varphi_n[y/x]) \vdash (\forall y(\neg\varphi_n[y/x]) \rightarrow (\neg\varphi_n))$ [din 15, cf. *lemei 3.3*]

17. $\forall y(\neg\varphi_n[y/x]) \vdash (\neg\varphi_n)$ [14, 16, *mp*]

18. $\forall y(\neg\varphi_n[y/x]) \vdash \forall x(\neg\varphi_n)$ [din 17, prin *UG*]

19. $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash \forall x(\neg\varphi_n)$ [din 13. şi 18. prin CUT]

Dar 11 şi 19 sunt contradictorii, prin urmare, $\Gamma_0 \cup \mathrm{H}_1^{n-1} \vdash \bot$. Acum, dacă aplicăm argumentul de mai sus de *n* ori vom obţine că $\Gamma_0 \vdash \bot$, adică mulţimea Γ este inconsistentă, ceea ce contrazice asumpţia de bază a lemei. Dar putem încheia demonstraţia într-un mod mai elegant: presupunerea de la care am pornit era că *n* este numărul minim al axiomelor Henkin folosite în derivarea unei contradicţii, or tocmai am demonstrat pornind de la această asumpţie că putem deriva o contradicţie dintr-o mulţime care conţine *n-1* axiome Henkin. (vezi exercițiul 9)

Acum, pentru a ne asigura că toate formulele existenţiale vor fi asociate cu un martor Henkin, procedeul de extensie al signaturii trebuie continuat. Să oferim un exemplu pentru a înţelege de ce acest proces trebuie iterat.

Să presupunem că signatura noastră este σ = {*R, c*}, unde *R* este un simbol predicaţional binar, *c* este o constantă iar teoria noastră Γ conţine următoarea formulă: $\forall x \exists y(R(x, y))$. Conform cu *UI*, $\Gamma \vdash \exists y(R(c, y))$. Acum, pentru că scopul extinderii signaturii şi formării axiomelor Henkin este de a produce şi ataşa martori fiecărei propoziţii cuantificate existenţial, ne aşteptăm ca propoziţiei $\exists y(R(c, y))$ să-i fie ataşat, în extensia σ_1, un martor, să spunem c_1. Aşadar, în σ_1 vom avea axioma Henkin $\exists y(R(c, y)) \rightarrow R(c, c_1)$, unde c_1 este martorul propoziţiei $\exists y(R(c, y))$. În extensia σ_1, însă, putem deduce, conform cu *UI*, $\Gamma \vdash \exists y(R(c_1, y))$. Pentru că $\exists y(R(c_1, y))$ este o propoziţie existenţială dorim să ataşăm un martor şi acestei formule. Dar constantele din *C* sunt folosite pentru propoziţiile existenţiale din σ, iar formula noastră $\exists y(R(c_1, y))$ este o σ_1-propoziţie, prin urmare această formulă nu are un martor. Problema, însă, nu e gravă: ceea ce trebuie să facem este să continuăm procesul de extensie al signaturii şi pe cel al axiomelor Henkin pentru a ne asigura că propoziţiile cuantificate existenţial din orice signatură au un martor.

În lumina discuţiei de mai sus înţelegem raţiunea aplicării recursive a procedeelor descrise mai sus, pornind de la o signatură $\sigma = \sigma_0$ şi o teorie $\Gamma = \Gamma_0$, pentru a construi un şir de signaturi:

$$\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \sigma_3 \ldots$$

şi un şir de teorii corespunzătoare:

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \Gamma_3 \ldots$$

Fie $\sigma_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma_i$ şi $\Gamma_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$.

Lema 3.12: Γ_∞ este o mulţime consistentă de formule.

Demonstraţie: Tehnica demonstraţiei este similară celei din calculul propoziţiilor şi foloseşte *lemele 3.10* şi *3.11*.

Acum avem stabilite toate condiţiile pentru a construi, pornind de la Γ_∞, prin aplicarea *lemei lui Lindenbaum*, mulţimea maximal consistentă Δ, $\Gamma \subseteq \Delta$.

Fie o enumerare a tuturor propoziţiilor $\varphi \in \sigma_\infty$ (ştim că o astfel de enumerare este posibilă pentru că σ_∞ este o mulţime numărabilă – vezi exerciţiul 10):

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

Fie $\Gamma^0 = \Gamma_\infty$.

Definim:

$$\Gamma^{n+1} = \begin{cases} \Gamma^n \cup \{\varphi_{n+1}\}, \text{ dacă } \Gamma^n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ este consistentă} \\ \\ \Gamma^n, \text{ dacă } \Gamma^n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ este inconsistentă} \end{cases} .$$

Notăm cu Δ reuniunea acestor mulţimi, $\Delta = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma^i$.

Lema 3.13: Δ este o mulţime maximal consistentă.

Demonstraţie: similară demonstraţiei corespunzătoare din calculul propoziţiilor.

Să notăm că fiind o mulţime maximal consistentă, Δ are toate proprietăţile acestui tip de mulţimi, iar cele pe care le vom folosi în demonstraţia teoremei de completitudine au fost specificate şi demonstrate în capitolul anterior, de unde le preluăm.

Acum putem trece la pasul al doilea al demonstraţiei existenţei unui model, respectiv să arătăm că mulţimea maximal consistentă Δ are un model. În acest scop, să definim relaţia de echivalenţă pe care o menționam puțin mai sus ca soluție la problemele pe care relația de identitate le ridică în construcția modelului din termenii care nu conțin variabile.

Definiţie 3.30: Fie signatura σ_∞ şi termenii TERM acestei signaturi. Definim TERM' = $\{t \in \text{TERM} / OV(t) = \emptyset\}$.

Definiţie 3.31: Fie signatura σ_∞, t_i, $t_j \in$ TERM' şi ~ o relaţie peste mulţimea TERM' astfel încât:

$$t_i \sim t_j \text{ ddacă } (t_i = t_j) \in \Delta.$$

Notăm clasa de echivalenţă a unui termen $t \in$ TERM' prin $[t]$, adică

$$[t] = \{t'/(t' = t) \in \Delta\}.$$

Lema 3.14: Relaţia ~ definită pe mulţimea TERM' este o relaţie de echivalenţă.

Demonstraţie: demonstraţia presupune o verificare de rutină a celor trei proprietăţi care definesc relaţiile de echivalenţă, *reflexivitatea*, *simetria*, *tranzitivitatea* şi o lăsăm în seama cititorului (vezi exerciţiul 11).

Construcţia modelului

Să defalcăm construcţia modelului M prin specificarea fiecărui item care constituie modelul, adică domeniul D şi interpetarea i a componentelor signaturii σ_∞.

(I) *Domeniul D*. Domeniul D constă din clasele de echivalenţă $[t]$ definite de relaţia ~ peste mulţimea TERM'. Aşadar, dacă în σ_∞ apare, de pildă, termenul $f(c_1, c_2)$ în D vom avea un element constituit din clasa de echivalenţă $[f(c_1\ c_2)] \in D$.

(II) *Constantele*. Fiecare simbol de constantă c din σ_∞ va fi interpretat prin propria sa clasă de echivalenţă $[c]$, $i(c) = c^M = [c]$.

(III) *Funcţiile*. Fiecare simbol funcţional n-ar f, $n \in \mathbb{N}$, din σ_∞ va fi interpretat printr-o funcţie f^M definită în următorul mod: $i(f) = f^M: D^n \to D$,

$$f^M([t_1], [t_2], ..., [t_n]) = [f(t_1\ t_2\ ...\ t_n)]$$

Să detaliem mecanismul interpretativ descris mai sus pentru cazul în care funcţia f^M este de aritate 1. În acord cu egalitatea de mai sus, $f^M([t]) = [f(t)]$, mai intuitiv, aplicarea funcţiei f^M clasei de echivalenţă $[t]$ se realizează în trei paşi:

1) identificăm termenul t a cărui clasă de echivalenţă este $[t]$
2) formăm termenul $f(t)$ – prin aplicarea simbolului funcţional f termenului t
3) formăm clasa de echivalenţă $[f(t)]$ a termenului de la pasul 2).

Acum, cititorul atent la detaliile definiţiei funcţiei f^M a putut observa o problemă cu pasul 1): deşi am folosit articolul hotărât, există mai mulţi termeni $t_i^{'}$ a căror clasă de echivalenţă este $[t]$. Pentru a proba că f^M este într-adevăr o funcţie trebuie să arătăm că orice doi termeni echivalenţi t şi $t_i^{'}$ trimit la aceeaşi clasă de echivalenţă $[f(t)]$, adică, să arătăm că din $[t] = [t_i^{'}]$ (consecinţă a faptului că $t \sim t_i^{'}$) decurge $f^M([t]) = f^M([t_i^{'}])$; matematic, trebuie să arătăm că f^M este o funcţie bine definită.

Lema 3.15: Funcţia f^M: $D^n \rightarrow D$, $f^M([t_1], [t_2], ..., [t_n]) = [f(t_1\ t_2\ ...\ t_n)]$ este bine definită.

Demonstraţie: presupune identificarea unei deducţii a identităţii:

$$\Delta \vdash (f(t_1^{'}\ t_2^{'}\ ...\ t_n^{'}) = f(t_1\ t_2\ ...\ t_n)).$$

pornind de la deducţiile (1) $\Delta \vdash (t_1^{'} = t_1)$, (2) $\Delta \vdash (t_2^{'} = t_2)$, ..., ($n$) $\Delta \vdash (t_n^{'} = t_n)$.

1. $\Delta \vdash \forall x_1 \forall y\ ((x_1 = y) \rightarrow (f(x_1, ..., x_n) = f(y, ..., x_n)))$ [I_2 + UG + THIN]
2. $\Delta \vdash \forall x_1 \forall y\ (((x_1 = y) \rightarrow (f(x_1, ..., x_n) = f(y, ..., x_n))) \rightarrow ((t_1^{'} = t_1) \rightarrow (f(t_1^{'}, ..., x_n) = f(t_1, ..., x_n))))$ [2, $UI[t_1^{'}/x_1, t_1/y]$]
3. $\Delta \vdash ((t_1^{'} = t_1) \rightarrow (f(t_1^{'}, ..., x_n) = f(t_1, ..., x_n)))$ [1, 2, *mp*]
4. $\Delta \vdash (f(t_1^{'}, ..., x_n) = f(t_1, ..., x_n))$ [(1), 3, *mp*]

Repetând de *n-1* ori procedeul de mai sus vom obține

$$\Delta \vdash (f(t_1^{'}\ t_2^{'}\ ...\ t_n^{'}) = f(t_1\ t_2\ ...\ t_n))$$

Conform *lemei închiderii deductive* rezultă

$$(f(t_1^{'}\ t_2^{'}\ ...\ t_n^{'}) = f(t_1\ t_2\ ...\ t_n)) \in \Delta,$$

adică funcția f^M este bine definită.

(IV) *Predicatele*. Fiecare simbol predicativ n-ar P din σ_∞ este interpretat ca o relaţie P^M pe D, $i(P) = P^M$, definită în următorul mod:

$$<[t_1], [t_2], ..., [t_n]> \in P^M \text{ ddacă } P(t_1\ t_2\ ...\ t_n) \in \Delta.$$

Această echivalenţă este, cred, cea mai intuitivă dintre toate: Relaţia P^M are loc între clasele de echivalenţă a termenilor ($[t_1]$, $[t_2]$, ..., $[t_n]$) daca şi numai dacă formula atomară corespunzătoare $P(t_1\ t_2\ ...\ t_n)$ se află în Δ. Amintiţi-vă că scopul acestei construcţii este să constituie un model al mulţimii Δ.

Remarcaţi că îngrijorarea cu privire la definirea funcţiei f^M se resfrânge şi asupra relaţiei P^M şi încurajăm cititorul să demonstreze că relaţia P^M nu este dependentă de alegerea termenilor t_1, t_2, …, t_n care constituie clasele de echivalenţă $[t_1]$, $[t_2]$, …, $[t_n]$ – vezi exercițiul 12.

Acum, ceea ce trebuie să arătăm este că structura definită mai sus îşi face treaba, mai precis că structura $M = <D, [c]_i, f^M, P^M>$, unde itemii D, $[c]_i$, f^M, P^M au fost precizaţi mai sus, constituie un model al mulţimii maximal consistente Δ. Pentru a demonstra acest lucru să remarcăm:

Lema 3.16: Pentru orice termen $t \in$ TERM’, $t^M = [t]$.

Demonstraţie: [prin inducţie pe complexitatea termenilor]

În acord cu proprietatea descompunerii unice a termenilor, avem un singur caz de bază şi un singur pas inductiv.

Cazul de bază: $t = c$.

În acest caz, $t^M = c^M = [c]$ [definiţia constantelor c]

Ipoteza inducţiei este evidentă: orice termen t_i cu o complexitate $c(t_i) < n$ respectă:

$$\text{(IH) } t_i^M = [t_i].$$

Pasul inductiv: $t = f(t_1\ ...\ t_n)$, unde $c(t) = n$.

$t^M = f^M(t_1^M, t_2^M, ..., t_n^M)$ [definiţia valorii unui termen]

$= f^M([t_1], [t_2], ..., [t_n])$ [(IH)]

$= [f(t_1\ t_2\ ...\ t_n)]$ [definiţia lui f^M]

Lema 3.17: Pentru orice propoziţie φ, $\varphi \in \Delta$ ddacă $M \models \varphi$.

Demonstraţie: [prin inducţie pe complexitatea formulelor]

Cazul de bază: conform proprietăţii de descompunere unică a formulelor, avem două tipuri de formule atomare $\varphi = P(t_1, ..., t_n)$ și $\varphi = (t_i=t_j)$. În consecinţă, vom trata cazurile separat.

a) $\varphi = P(t_1, ..., t_n)$.

În acest caz,

$P(t_1, ..., t_n) \in \Delta$ ddacă $<[t_1], [t_2], ..., [t_n]> \in P^M$ [definiția relației P^M – vezi (IV)]

ddacă $M \models \varphi$ [definiția satisfiabilității].

b) $\varphi = (t_i = t_j)$.

În acest caz $\varphi \in \Delta$ ddacă $(t_i = t_j) \in \Delta$

ddacă $t_i \sim t_j$ [definiţia relaţiei ~]

ddacă $[t_i] = [t_j]$ [din *lema 3.16*, $t_i^M = [t_i]$, $t_j^M = [t_j]$ plus $t_i \sim t_j$]

ddacă $M \models \varphi$[definiția satisfiabilității].

Pasul inductiv: Să formulăm, acum, ipoteza inductivă:

(IH) $\varphi \in \Delta$ ddacă $M \models \varphi$, pentru orice φ, astfel încât $c(\varphi) < n$

Conform proprietăţii de descompunere unică, singurele forme pe care o formulă le poate avea sunt: $\varphi = (\neg\psi)$; $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$; $\varphi = \forall x(\psi)$. Să considerăm cazurile pe rând:

c) $\varphi = (\neg\psi)$, şi $c(\varphi) = n$.

$\varphi \in \Delta$ ddacă $\psi \notin \Delta$ [din condiţia că Δ este o mulţime maximal consistentă]

……..ddacă $M \not\models \psi$ [(IH)]

ddacă $M \models (\neg\psi)$ [definiţia satisfiabilităţii formulei $(\neg\psi)$]

ddacă $M \models \varphi$ [identitatea $\varphi = (\neg\psi)$].

d) $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ şi $c(\varphi) = n$

(A) *Necesitatea*

Dacă $M \models \varphi$, atunci fie $M \not\models \psi$, fie $M \models \chi$ [definiţia satisfiabilităţii]

atunci fie $\psi \notin \Delta$, fie $\chi \in \Delta$ [(IH)].

atunci fie $(\neg\psi) \in \Delta$, fie $\chi \in \Delta$ [Δ este maximal consistentă]

Să le considerăm pe rând:

(I) Dacă $(\neg\psi) \in \Delta$, atunci

$$(1)\ \Delta \vdash (\neg\psi).$$

Dar

$$(2)\ \Delta \vdash ((\neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))\ \text{[axioma propoziţională]}$$

Prin urmare,

$$(3)\ \Delta \vdash (\psi \rightarrow \chi)\ \text{[din (1) şi (2), prin } mp\text{]}$$

Din (3) rezultă:

$$(4)\ (\psi \rightarrow \chi) \in \Delta\ \text{[}\Delta\text{ este închisă deductiv]}$$

(II) Dacă $\chi \in \Delta$, atunci:

$$(5)\ \Delta \vdash \chi$$

Dar,

$$(6)\ \Delta \vdash (\chi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))\ \text{[axiomă propoziţională]}$$

Prin urmare

$$(7)\ \Delta \vdash (\psi \rightarrow \chi)\ \text{[din (5) şi (6), prin } mp\text{]}$$

Din (7) rezultă

$$(8)\ (\psi \rightarrow \chi) \in \Delta\ [\Delta \text{ este închisă deductiv}].$$

Din (I) şi (II) rezultă că, dacă $(\neg\psi) \in \Delta$ sau $\chi \in \Delta$, atunci $(\psi \rightarrow \chi) \in \Delta$.

(B) *Suficienţa*

Acum, celălalt sens al echivalenţei este uşor de demonstrat. Într-adevăr,
dacă $\varphi \in \Delta$, atunci $(\psi \rightarrow \chi) \in \Delta$

atunci fie $\psi \notin \Delta$, fie $\chi \in \Delta$ [*lema 2.19* a calculului propoziţional]

atunci fie $M \not\models \psi$, fie $M \models \chi$.[(IH)]

atunci $M \models (\neg\psi)$, fie $M \models \chi$ [definiţia satisfiabilităţii formulei $(\neg\psi)$].

atunci $M \models (\psi \rightarrow \chi)$ [definiţia satisfiabilităţii formulei $(\psi \rightarrow \chi)$]

Din (A) şi (B) rezultă echivalenţa: $\varphi \in \Delta$ ddacă $M \models \varphi$

e) $\varphi = \forall x(\psi)$ şi $c(\varphi) = n$.

(C) *Suficienţa*

Să presupunem că $\forall x(\psi) \in \Delta$ şi să demonstrăm că $M \models \forall x(\psi)$. În acest sens, trebuie să demonstrăm că pentru orice asignare s,

$$(M, s) \models \forall x(\psi), \text{ adică,}$$

$$\text{pentru orice } [t] \in D,\ (M, s[x := [t]]) \models \psi,$$

unde elementele $[t] \in D$ reprezintă clasele de echivalență ale termenilor t care nu conțin variabile. Acum, valoarea unui termen t care nu conține variabile, într-o asignare s, este $\bar{s}(t) = t^M = [t]$, adică este chiar clasa de echivalenţă a acelui termen, fapt ce a constituit obiectul *lemei 3.16*. În consecinţă, prin teorema substituţiei, ceea ce trebuie să demonstrăm este echivalent cu:

$$(M, s) \models \psi[t/x], \text{ pentru orice } t \text{ care nu conține variabile.}$$

Pentru că $\psi[t/x]$ este o propoziţie, putem infera că pentru orice t care nu conține variabile,

$$(M, s) \models \psi[t/x] \text{ ddacă } M \models \psi[t/x].$$

Aşadar, demonstraţia aserţiunii $M \models \forall x(\psi)$ se reduce la demonstraţia aserţiunii

$$M \models \psi[t/x].$$

Din presupunerea că

$$\forall x(\psi) \in \Delta,$$

decurge

$$(1)\ \Delta \vdash \forall x(\psi).$$

(2) $\Delta \vdash (\forall x(\psi) \rightarrow \psi[t/x])$ [*UI* plus faptul că $t \in$ TERM' aşadar e substituibil lui x]

(3) $\Delta \vdash \psi[t/x]$. (din (1) şi (2), *mp*)

(4) $\psi[t/x] \in \Delta$ [închiderea deductivă]

(5) $M \models \psi[t/x]$ [ipoteza inductivă].

(D) *Necesitatea*

În loc să demonstrăm implicaţia 'dacă $M \models \forall x(\psi)$, atunci $\forall x(\psi) \in \Delta$' vom demonstra contrapusa, respectiv, dacă $\forall x(\psi) \notin \Delta$, atunci $M \not\models \forall x(\psi)$.

Aşadar, să asumăm că $\forall x(\psi) \notin \Delta$ şi să demonstrăm că $M \not\models \forall x(\psi)$.

Dacă $\forall x(\psi) \notin \Delta$, atunci $\neg \forall x(\psi) \in \Delta$ [Δ este maximal consistentă]

atunci $\exists x(\neg\psi) \in \Delta$ [definiţia cuantificatorului existenţial]

atunci $\exists x((\neg\psi) \rightarrow (\neg\psi[c_i/x]))$ [axiomă Henkin]

atunci $(\neg\psi[x/c_i]) \in \Delta$ [*mp* + închiderea deductivă]

atunci $M \models (\neg\psi[c_i/x])$ [(IH)]

atunci $M \not\models \forall x(\psi)$.

În sfârşit, lema existenţei unui model este demonstrată.

Acum, să ne amintim că acest model M este al mulţimii Δ, or noi ne-am propus să construim un model al mulţimii Γ. S-ar putea argumenta că $\Gamma \subseteq \Delta$ şi $M \models \Delta$, prin urmare, $M \models \Gamma$, adică orice model al lui Δ este *a fortiori* şi un model al lui Γ. Corect, dar este un σ_∞-model, iar noi ne-am propus să construim un σ-model al mulţimii Γ. Ajustările pe care trebuie să le facem, însă, sunt minore: trebuie să restrîngem structura M la signatura σ: $M\restriction\sigma$. Restrângerea nu înseamnă o modificare a domeniului D nici a interpretării constantelor, simbolurilor funcţionale şi predicaţionale. ci doar ignorarea tuturor simbolurilor adăugate în trecerea de la σ la σ_∞. Aşadar, ceea ce vă rămâne de demonstrat este următoarea lemă:

Lema 3.18: Pentru orice σ-formulă $\varphi \in \Gamma$, $M \models \varphi$ ddacă $M \restriction \sigma \models \varphi$.

Lăsăm demonstrația acestei leme în sarcina cititorului – vezi exercițiul 13..
Această lemă plus argumentul oferit la începutul aceste secţiuni finalizează demonstraţia teoremei de completitudine.

În finalul acestui capitol vom arăta cum principalele teoreme de caracterizare ale logicii de ordinul I pot fi obţinute din teorema de completitudine urmând ca în capitolul următor să detaliem şi analizăm semnificaţia acestor rezultate.

Teorema 3.10: *Teorema Löwenheim-Skolem*: Fie Γ o mulţime consistentă de propoziţii ale logicii de ordinul I. Dacă această mulţime are modele infinite, de cardinalitate *k*, atunci are un model numărabil.

Teorema, după cum se poate observa, este un corolar al teoremei existenţei unui model. În construcţia modelului am folosit doar elementele sintaxei limbajului logicii de ordinul I pe care l-am considerat ca fiind numărabil, mai precis am construit modelul prornind de la clasele de echivalenţă modulo relaţia de identitate (=) ale termenilor $\mathcal{L}(\sigma)$ care nu conțin variabile. Această observaţie este suficientă pentru a asigura demonstraţia teoremei *Löwenheim-Skolem*.

Teorema 3.11: *Teorema de compactitate*: O mulţime Γ de propoziţii ale logicii de ordinul I are un model dacă şi numai dacă fiecare submulţime finită $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ are un model.

Acestă teoremă poate fi demonstrată uşor, pornind de la teorema de completitudine şi urmând logica demonstraţiei teoremei de compactitate din calculul propoziţiilor, aşa încât o lăsăm pe seama lectorului acestei lucrări – exercițiul 14.

Exerciții

1. Demonstrați *lema 3.3* folosindu-vă de rezultatul obținut în *lema 3.4*.
2. Demonstrați *corolarul 3.3*.
3. Demonstrați că sistemul axiomatic prezentat este caracterizat de proprietățile AS, THIN și CUT.
4. Demonstrați *teorema deducției*.

5. Fie σ o signatură și $\mathcal{L}(\sigma)$ limbajul logicii de ordinul I cu signatura σ.

   Oferiți o procedură efectivă de enumerare a formulelor limbajului $\mathcal{L}(\sigma)$.
6. În condițiile exercițiului 5. Oferiți o procedură efectivă de enumerare a propozițiilor cuantificate existențial ale limbajului $\mathcal{L}(\sigma)$.
7. Demonstrați *faptul 1*
8. Demonstrați *faptul 2*.
9. Oferiţi o demonstraţie directă a *lemei 3.1*, adică arătaţi că dacă $\Gamma_0 \cup H_1^n \vdash \psi$, atunci $\Gamma_0 \vdash \psi$
10. Oferiți o procedură efectivă de enumerare a tuturor propozițiilor $\varphi \in \sigma_\infty$.
11. Demonstrați că relaţia ~ definită pe mulţimea TERM' este o relaţie de echivalenţă.
12. Demonstrați că relaţia P^M este bine definită.
13. Demonstrați *lema 3.18*.
14. Demonstrați *teorema de compactitate*.

4 Noţiuni elementare de teoria modelelor

În acestă secţiune ne propunem să definim, exemplificăm şi demonstrăm câteva rezultate elementare din cadrul teoriei modelelor: *izomorfism a două structuri*, *echivalenţă elementară*, *categoricitate*, *substrucură*.

În acest scop, să definim primele două concepte de bază: cel de izomorfism a două modele (structuri) şi cel de echivalenţă elementară a două modele. În toate aceste definiții presupunem că signatura σ este fixată.

Definiţie 4.1: *(izomorfism):* Spunem despre două modele sau structuri $M_1 = (D_1, i_1)$ şi $M_2 = (D_2, i_2)$ ale unei signaturi σ că sunt *izomorfe* (simbolic, $M_1 \cong M_2$) ddacă există o funcţie $F: D_1 \rightarrow D_2$ astfel încât:

i) F este bijectivă

ii) pentru orice $c \in C$, $F(c^{M_1}) = c^{M_2}$.

iii) pentru orice simbol predicativ $P \in Pr$, şi orice n-tuplu $<d_1, \ldots, d_n>$ de elemente din D_1^n, $<d_1, \ldots, d_n> \in P^{M_1}$ ddacă $<F(d_1), \ldots, F(d_n)> \in P^{M_2}$.

iv) pentru orice simbol funcţional $f \in \mathrm{F}$, şi orice n-tuplu $<d_1, \ldots, d_n>$ de elemente din D_1^n, $F(f^{M_1} <d_1, \ldots, d_n>) = f^{M_2} <F(d_1), \ldots, F(d_n)>$.

După cum se poate verifica uşor, aplicaţiile identice $i_{d1}: D_1 \rightarrow D_1$, $i_{d2}: D_2 \rightarrow D_2$, sunt exemple de izomorfism.

Fie s_1 o asignare oarecare în modelul M_1. În acord cu definiţia de mai sus, putem defini o asignare s_2 corespunzătoare lui s_1 astfel:

$$s_2: F \circ s_1.$$

Dacă renunţăm la condiţia i), atunci spunem că F defineşte un *homomorfism* iar pentru a distinge această funcţie de funcţia F, o notăm cu h.

Definiţie 4.2: Două modele M_1 şi M_2 sunt *elementar echivalente* (simbolic $M_1 \equiv M_2$) ddacă pentru orice σ-propoziție φ are loc:

$$M_1 \models \varphi \text{ ddacă } M_2 \models \varphi.$$

Teorema 4.1: *Teorema de izomorfism*: Dacă $M_1 \cong M_2$, atunci $M_1 \equiv M_2$.

Demonstrație: vom demonstra, în continuare, o aserțiune mai puternică: pentru orice σ-formulă φ și orice asignare s_1 există o asignare s_2: $F \circ s_1$ astfel încât:

$$(M_1, s_1) \models \varphi \text{ ddacă } (M_2, s_2) \models \varphi.$$

În acest scop, este mai profitabil să împărţim demonstraţia în două cazuri:

a) Pentru orice termen t, $F(\overline{s_1}(t)) = \overline{s_2}(t)$, unde, reamintim, $s_2 = F \circ s_1$.

b) Pentru orice σ-formulă φ şi orice asignare s_1,

$$(M_1, s_1) \models \varphi \text{ ddacă } (M_2, s_2) \models \varphi.$$

Demonstraţie a) [prin inducţie pe complexitatea termenilor]:

Conform proprietăţii de descompunere unică, orice termen t are una dintre formele: $t = c$, $t = x_i$, $t = f(t_1 \ldots t_n)$ dintre care primele două sunt cazurile de bază. Să le tratăm pe rând.

Cazul de bază:

i) Dacă $t = c$, atunci $F(\overline{s_1}(t)) = F(s_1(c)) = F(c^{M_1}) = c^{M_2} = F(\overline{s_2}(t))$.

ii) Dacă $t = x_i$, atunci $F(\overline{s_1}(t)) = F(s_1(x_i)) = (F \circ s_1)(x_i) = s_2(x_i) = F(\overline{s_2}(t))$.

Paul inductiv:

iii) Dacă $t = f(t_1 \ldots t_n)$, atunci:

(IH) $F(\overline{s_1}(t_i)) = \overline{s_2}(t_i)$, pentru orice $t_i \in \{t_1 \ldots t_n\}$ (ipoteza inducţiei).

$F(\overline{s_1}(t)) = F(\overline{s_1}(f(t_1 \ldots t_n))$

$= F(f^{M_1}((\overline{s_1}(t_1)), \ldots, (\overline{s_1}(t_n)))$ [conform evaluării în extensia $\overline{s_1}$]

$= f^{M_2}(F(\overline{s_1}(t_1)), \ldots, F\overline{s_1}(t_n))$ [conform asumpţiei că F este un izomorfism]

$= f^{M_2}(\overline{s_2}(t_1), \ldots, \overline{s_2}(t_n))$ [din (IH)]

$= \overline{s_2}(t)$.

Demonstraţie b) [prin inducţie pe complexitatea formulei]:

Conform proprietăţii de descompunere unică, orice formulă φ are una dintre formele: $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$, $\varphi = (t_i = t_j)$, $\varphi = (\neg\psi)$; $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$; $\varphi = \forall x(\psi)$, dintre care primele două sunt cazurile de bază. Să le tratăm pe rând:

Cazul de bază:

iv) $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$

$(M_1, s_1) \models P(t_1, \ldots, t_n)$ ddacă $<\overline{s_1}(t_1), \ldots, \overline{s_1}(t_n)> \in P^{M_1}$ [def. satisf.]

ddacă$<(F(\overline{s_1}(t_1)),\ldots,F\overline{s_1}(t_n))>\in P^{M_2}$ [F este un izomorfism]

ddacă $<\overline{s_2}(t_1), \ldots, \overline{s_2}(t_n)>\in P^{M_2}$ [conform cu a)]

ddacă $(M_2, s_2) \models P(t_1, \ldots, t_n)$.

v) $\varphi = (t_i = t_j)$.

$(M_1, s_1) \models (t_i = t_j)$ ddacă $\overline{s_1}(t_i) = \overline{s_1}(t_j)$

ddacă $F(\overline{s_1}(t_i)) = F(\overline{s_1}(t_j))$[$F$ este injectivă]

ddacă $\overline{s_2}(t_i) = \overline{s_2}(t_j)$ [conform cu a)]

ddacă $(M_2, s_2) \models (t_i = t_j)$

Pasul inductiv:

Ipoteza inducţiei (IH): presupunem că teorema are loc pentru toate formulele de complexitate mai mică decât n.

vi) $\varphi = (\neg\psi)$, $c(\varphi) = n$. Prin urmare, ipoteza inducţiei se aplică formulei ψ:

(IH) $(M_1, s_1) \models (\neg\psi)$ ddacă $(M_2, s_2) \models \psi$.

Nu este greu de văzut că (IH) este echivalentă[1] cu:

(IH') $(M_1, s_1) \not\models \psi$ ddacă $(M_2, s_2) \not\models \psi$.

$(M_1, s_1) \models (\neg\psi)$ ddacă $(M_1, s_2) \not\models \psi$ [def. satisf.]

ddacă $(M_2, s_2) \not\models \psi$ [IH']

vii) $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, $c(\varphi) = n$. Prin urmare, ipoteza inducţiei se aplică formulelor ψ şi χ:

(IH) $(M_1, s_1) \not\models \psi$ ddacă $(M_2, s_2) \not\models \psi$ şi

$(M_1, s_1) \models \chi$ ddacă $(M_2, s_2) \models \chi$

Acum, $(M_1, s_1) \models (\psi \rightarrow \chi)$ ddacă fie $(M_1, s_1) \not\models \psi$, fie $(M_1, s_2) \models \chi$ [def. satisf.].

Dar $(M_1, s_1) \not\models \psi$ ddacă $(M_2, s_2) \not\models \psi$ [IH] şi $(M_1, s_1) \models \chi$ ddacă $(M_2, s_2) \models \chi$ [IH]

viii) $\varphi = \forall x(\psi)$

$\varphi = \forall x(\psi)$, $c(\varphi) = n$. Prin urmare, ipoteza inducţiei se aplică formulei ψ.

$(M_1, s_1) \models \forall x(\psi)$ ddacă pentru orice $d_1\in D_1$, $(M_1, s_1[x: = d_1]) \models \psi$ [def. satisf.]

ddacă pentru orice $d_1\in D_1$, $(M_2, (F \circ s_1[x: = d_1])) \models \psi$ [ipoteza inducţiei plus $s_2 = F \circ s_1$.]

[1] Vezi nota 12.

ddacă pentru orice $d_1 \in D_1$, $(M_2, s_2[x: = F(d_1)]) \models \psi$

[pentru că $F \circ s_1[x: = d_1] = s_2[x: = F(d_1)]$]

ddacă pentru orice $d_2 \in D_2$, unde $d_2 = F(d_1)$, $(M_2, s_2[x: = d_2])) \models \psi$

[F este o funcţie bijectivă]

ddacă $(M_2, s_2) \models \forall x(\psi)$.

Cu acest ultim caz teorema este demonstrată.

Având definiţia a ceea ce înseamnă că două modele sau structuri sunt elementar echivalente putem defini ce anume înseamnă completitudinea semantică în termeni mai precişi şi putem stabili legătura dintre completitudinea semantică şi categoricitate.

Definiţie 4.3: (*completitudine semantică*) O teorie este *semantic completă* ddacă toate modelele teoriei sunt elementar echivalente.

Să vedem acum ce anume înseamnă că o teorie este categorică.

Definiţie 4.4: (*categoricitate*) O teorie este *categorică*[2] ddacă orice modele ale teoriei sunt izomorfe.

Un moment de atenţie asupra definiţiei ne permite să observăm că lipsa completitudinii semantice implică lipsa categoricităţii şi prin contrapoziţie, că teoriile categorice sunt semantic complete, ceea ce subliniam şi puţin mai sus.

În continuare vom câteva exemple de teorii categorice şi vom demonstra categoricitatea acestora. Vom începe prin a demonstra categoricitatea sistemelor Peano. O menţiune trebuie făcute înainte de a oferi această demonstraţie: definirea sistemelor Peano, aşa cum o oferim mai jos, depăşeşte cadrul expresiv al logicii de ordinul I (ceea ce ne oferă posibilitatea de a demonstra categoricitatea acesteia).

Definiţie 4.5: Un sistem Peano este un triplet $<X, 0_X, S_X>$, format dintr-o mulţime X, un element distinctiv 0_X şi o funcţie S_X: $X \to X$, care satisface următoarele cerinţe:

i) $0_X \neq S_X(x)$, pentru orice $x \in X$

ii) S_X este o funcţie injectivă

iii) pentru orice $A \subseteq X$, dacă $0_X \in A$ şi $S_X(x) \in A$ oricând $x \in A$, atunci $A = X$.

[2] Folosirea termenului *categoricitate* cu sensul dat în definiţia 4.4 apare pentru prima oară la Oswald Veblen, în Oswald Veblen [1904], 'A system of axioms f or geometry', *Trans. Amer. Math. Soc.*, 5, p. 346.

Modelul intenţional descris de un astfel de sistem este şirul numerelor naturale. Să considerăm, aşadar, tripletul $<\omega, 0, S>$ în care ω este mulţimea numerelor naturale, iar $S: \omega \to \omega$ este funcţia succesor, $S(x) = x + 1$, pentru orice $x \in \omega$. Cu aceste precizări se poate observa că $<\omega, 0, S>$ este un sistem Peano: 0 nu este succesorul nici unui număr natural, funcţia $S(x) = x + 1$este injectivă (exerciţiu) iar ω permite aplicarea principiului inducţiei. De fapt, cele trei condiţii de mai sus au rolul de a caracteriza şirul numerelor naturale: condiţia (i) îl situează pe 0_X în poziţia de prim element al şirului şi, în acest fel, interzice ciclarea şirului la acest element, condiţia (ii) interzice ciclarea şirului la orice elemente diferite de 0 iar condiţia (iii) reprezintă principiul inducţiei, care garantează că mulţimea ω a numerelor naturale este cea mai mică mulţime care îl conţine pe 0 şi este închisă faţă de funcţia succesor. Problema categoricităţii este reprezentată de întrebarea 'Determină sistemele Peano până la izomorfism structura pe care intenţionează să o descrie?' Răspunsul este 'da' iar el constituie obiectul teoremei lui *Dedekind* de mai jos. Pentru a putea demonstra teorema izomorfismului vom prezenta, fără a demonstra, câteva rezultate preliminare şi vom defini ce anume este un izomorfism a două sisteme Peano, P_1 şi P_2.

Definiţie 4.6: (*Izomorfismul sistemelor Peano*) Fie două sisteme Peano $P_1 = <X, 0_X, S_X>$ şi $P_2 = <Y, 0_Y, S_Y>$,. Spunem că cele doua sisteme sunt izomorfe, $P_1 \cong P_2$, dacă şi numai dacă există o funcţie $f: X \to Y$ care satisface următoarele cerinţe:

i) f este bijectivă
ii) $f(0_X) = 0_Y$,şi
iii) $f(S_X(x)) = S_Y(f(x))$, pentru orice $x \in X$.

Teorema 4.2: Între oricare două sisteme Peano $P_1 = <X, 0_X, S_X>$ şi $P_2 = <Y, 0_Y, S_Y>$ există o unică funcţie $f: X \to Y$ astfel încât

1) $f(0_X) = 0_Y$, şi
2) $f(S_X(x)) = S_Y(f(x))$, pentru orice $x \in X$.

După cum se poate observa, condiţiile ii) şi iii) ale definiţiei izomorfismului coincid cu proprietăţile 1 şi 2 ale funcţiei f, ceea ce ne sugerează o modalitate de demonstrare a izomorfismului a două sisteme Peano: via teorema recursivităţii.

Lema 4.1: În orice sistem Peano $P_1 = <X, 0_X, S_X>$, pentru orice $0_X \neq S_X(x)$ există un $x'' \in X$ astfel încât $S_X(x'') = x$.

Teorema 4.3: (*Dedekind*) Fie două sisteme Peano $P_1 = <X, 0_X, S_X>$ şi $P_2 = <Y, 0_Y, S_Y>$. În aceste condiţii, $P_1 \cong P_2$,

Demonstraţie

Conform *teoremei recursivităţii*, între cele două sisteme Peano există o unică funcţie $f: X \rightarrow Y$ care respectă condiţiile ii) si iii) ale definiţiei izomorfismului. Prin urmare, tot ceea ce mai rămâne de demonstrat este condiţia u), respectiv că f este o funcţie bijectivă. Cum bijectiv = surjectiv + injectiv, vom împărţi demonstraţia in două parţi: în prima parte stabilim surjectivitatea funcţiei f iar în a doua stabilim injectivitatea acesteia.

f este surjectivă

Să considerăm submulţimea $f(X) \subseteq Y$ imaginilor (sub funcţia f, evident) tuturor elementelor $x \in X$ şi să demonstrăm prin inducţie că $f(X) = Y$. Să notăm că $f(X) = \{y/\text{există } x \in X, \text{ astfel încât } y = f(x)\}$.

(1) $0_Y \in f(X)$ pentru că $f(0_X) = 0_Y$ (proprietatea 1 a funcţiei f).

(2) Fie un element aribtrar $y \in f(X)$. Conform definiţiei lui $f(X)$ există un $x \in X$ astfel încât $y = f(x)$. Fie, acum, succesorul acestui x, $S_X(x)$. Conform proprietăţii 2. a funcţiei f,

$$f(S_X(x)) = S_Y(f(x)) = S_Y(y).$$

Dar $f(S_X(x)) \in f(X)$, aşadar $S_Y(y) \in f(X)$. Prin urmare, din presupunerea că $y \in f(X)$ rezultă că $S_Y(y) \in f(X)$. Din (1) şi (2) rezultă că $f(X)$ satisface condiţia (iii) a sistemelor Peano, aşadar $f(X) = Y$.

f este injectivă

Pentru a demonstra injectivitatea funcţiei f vom aplica aceeaşi strategie ca în demonstraţia surjectivităţii, respectiv vom demonstra că mulţimea elementelor (diferite) din X care au imagini diferite în Y este întreaga mulţime X, ceea ce revine la a spune că f este injectivă. Fie, aşadar, mulţimea

$$A = \{x \in X/\text{pentru orice } x' \in X, \text{ dacă } x \neq x', \text{ atunci } f(x) \neq f(x')\}.$$

(1) În primul pas urmărim să demonstrăm că $0_X \in A$, mai precis, că pentru orice $x \in X$, din $x \neq 0_X$, rezultă $f(0_X) \neq f(x)$. Conform proprietăţii 1 a funcţiei f, $f(0_X) = 0_Y$. Fie acum un element oarecare $x \in X$, $x \neq 0_X$. Conform *lemei 1.45*, există un $x'' \in X$ astfel încât $x = S(x'')$. Aşadar,

$$f(x) = f(S_X(x'')) = S_Y(f(x'')) \text{ [din proprietatea 2 a funcţiei } f\text{]}.$$

Dar P_2 este un sistem Peano, la rândul lui, de unde rezultă că $0_Y \neq S_Y(y)$, pentru orice $y \in Y$, în particular, $0_Y \neq S_Y(f(x''))$. Aşadar, pentru orice $x \in X$, din $x \neq 0_X$, rezultă

$$f(x) = f(S_X(x'')) = S_Y(f(x'')) \neq 0_Y = f(0_X).$$

Cu aceasta am stabilit că $0_X \in A$.

(2) În continuare urmărim să demonstrăm că din presupunerea că $x \in A$ decurge că $S_X(x) \in A$ de asemenea. Conform definiţiei mulţimii A, $S_X(x) \in A$ dacă şi numai dacă, pentru orice $x' \in X$, dacă $x' \neq S_X(x)$, atunci $f(x') \neq f(S_X(x))$. Să presupunem, aşadar, că $x \in A$ şi să considerăm un $x' \in A$ astfel încât $x' \neq S_X(x)$. Sunt posibile două situaţii:

a) $x' = 0_X$ sau

b) $x' \neq 0_X$

Dacă $x' = 0_X$, atunci, prin intermediul argumentului de mai sus, deducem că

$$f(x') \neq f(S_X(x)).$$

Dacă $x' \neq 0_X$, atunci, conform *lemei 1.45* există $x'' \in X$ astfel încât $x' = S_X(x'')$. Dar x' a fost ales astfel încât $x' \neq S_X(x)$, adică

$$x' = S_X(x'') \neq S_X(x),$$

Pentru că S_X este o funcţie injectivă rezultă că $x'' \neq x$. Dar, din presupunerea că $x \in A$, ştim că dacă $x'' \neq x$, atunci $f(x) \neq f(x'')$. Aşadar, din ipoteza că $x \in A$, obţinem că $f(x'') \neq f(x)$. Conform proprietăţii 2 a funcţiei f,

$$f(x') = f(S_X(x'')) = S_Y((f(x'')) \text{ şi}$$
$$f(S_X(x)) = S_Y(f(x)).$$

Mai sus, însă, am stabilit că din presupunerea că $x \in A$ obţinem $f(x'') \neq f(x)$, iar S_Y este, la rândul ei, o funcţie injectivă, de unde rezultă că dacă $x \in A$, atunci

$$S_Y(f(x'')) \neq S_Y(f(x)).$$

Însă

$$S_Y(f(x'')) = f(S_X(x'')) = f(x') \text{ şi}$$
$$S_Y(f(x)) = f(S_X(x)),$$

de unde rezultă că $f(x') \neq f(S_X(x))$.

Cu aceasta am stabilit că din presupunerea că $x \in A$ decurge că $S_X(x) \in A$.

Din (1) şi (2) rezultă că $A = X$, ceea ce, după cum subliniam şi mai sus, este echivalent cu demonstrarea injectivităţii funcţiei f

Prin urmare am stabilit că $f: X \to Y$ este bijectivă şi, cu aceasta, că $P_1 \cong P_2$.

Următorul exemplu este din geometrie. Fie următoarele axiome[3]:

A_1 *Prin oricare două puncte distincte A şi B trece o linie l şi doar una care le conţine.*

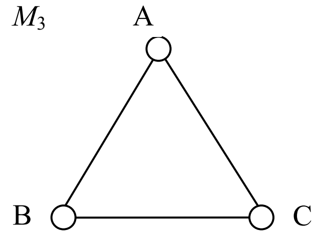
A_2 *Fiecare linie l conţine cel puţin două puncte distincte.*

A_3 *Există trei puncte necolineare.*

Înţelegem prin colinear faptul că sunt situate pe aceeaşi linie, şi spunem că două linii sunt paralele dacă nu au nici un punct comun. Să observăm faptul că dacă două linii nu sunt paralele, atunci ele au exact un punct comun (pentru că mai mult de un punct comun ar încălca A_1.)

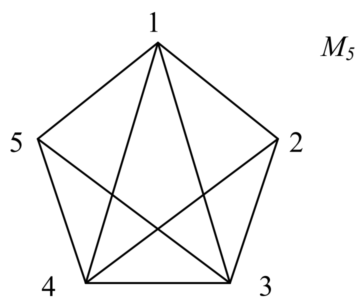
Orice model care conţine o mulţime de puncte şi o mulţime de linii care satisfac aceste axiome constituie o *geometrie de incidenţă*. De pildă structura $M_3 = \langle D_3 = \{A, B, C\},\ R = \{(A,B);(B,C);(A,C)\}\rangle$ a cărui diagramă este prezentată mai jos reprezintă un model al acestei geometrii de incidenţă.

figura 2



Axiomele $A_1 – A_3$ nu îşi determină modelul până la izomorfism. Modelul M_5 (a cărui structură nu o mai detaliem, fiind, cred, evidentă) reprezentat diagramatic în *figura 3*, de mai jos, satisface cele trei axiome de incidenţă, dar nu este, evident, izomorf cu modelul de mai sus.

figura 3



[3] Cititorul avizat a recunoscut în aceste axiome, axiomele de incidenţă din sistemul geometric al lui David Hilbert – vezi David Hilbert [1980], *The Foundations of Geometry*, Ediţia a doua, Chicago: Open Court publicată original sub denumirea de *Grundlagen der Geometrie* în 1899.

Modelul M_5 nu este izomorf cu M_3 pentru că cele două modele nu au aceeaşi cardinalitate, $\overline{D_5} = 5$ iar $\overline{D_3} = 3$. O întrebare legitimă este dacă modelele obţinute prin restrângerea domeniul modelului la un anumit număr de elemente, sau puncte, în cazul nostru, sunt izomorfe între ele sau nu. În general, dacă modelele de aceeaşi cardinalitate sunt izomorfe, atunci categoricitatea modelelor se stabileşte prin adăugarea unei axiome suplimentare cu rolul de a fixa cardinalitatea modelului. Cu toate acestea, stipulaţiile care fixează cardinalitatea modelului nu sunt suficiente pentru a stabili categoricitatea modelului, iar un exemplu în acest sens, discutat intens începând cu anii 30 ai secolului trecut, este reprezentat de aritemtica Peano, aşa cum este aceasta formalizată în logica de ordinul I. Dar, în anumite cazuri, apelul la cardinalitatea modelului poate determina categoricitatea modelului.

Putem oferi un exemplu în acest sens: dacă adăugăm cerinţa ca modelul axiomlelor de incidenţă să conţină doar trei puncte, atunci se poate demonstra uşor că axiomele A_1. – A_3. determină acest model până la izomorfism. Orice model care conţine doar trei puncte este izomorf cu modelul reprezentat în diagrama de mai sus. Demonstraţia este elementară şi o vom schiţa, doar, în continuare: fie *M'* = {1, 2, 3} cele trei puncte ale modelului. Din A_3 rezultă că aceste puncte sunt necolineare, adică nu există o singură dreaptă care să le conţină. Din A_1. rezultă că fiecare submulţime de două puncte trebuie să fie conţinută într-o linie, adică {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} sunt conţinute în trei linii distincte. Conform cu A_2 aceste trei linii distincte sunt toate liniile acestui model, adică M' = $\langle M' = \{1, 2, 3\},\ \mathrm{R} = \{\{1,2\};\{1,3\};\{2,3\}\}\rangle$. Aşadar, structura *M*' este izomorfă cu structura M_3.

Oferim, în continuare, un alt exemplu de structură categorică.

Se numeşte grup orice structură $\langle G, \circ^G, e^G\rangle$ care respectă axiomele A_1, A_2, A_3 de mai jos:

A_1: $\forall x \forall y \forall z\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

A_2: $\exists e \forall x\ (x \circ e = x)$.

A_3: $\forall x \exists y (x \circ y = e)$.

în care G este o mulţime, e^G este un element al mulţimii G, $\circ^G$ este o operaţie binară asociativă pe mulţimea G iar variabilele *x*, *y*, *z* iau valori în această mulţime. Pentru simplificarea notaţiei vom recurge în continuare, la următoarele prescurtări: $^{o}\circ^G$ îl prescurtăm prin $\circ$ iar e^G îl prescurtăm prin *e* (prescurtările neintroducând ambiguităţi).

Informal, axioma A_1 ne spune că operaţia $\circ$ este asociativă, axioma A_2 că în mulţimea G există un element neutru *e* iar axioma A_3 că orice element al mulţimii G are un simetric în această mulţime.

Dacă operaţia $\circ$ este comutativă, atunci grupurile se numesc abeliene, iar comutativitatea operaţiei $\circ$ se specifică adăugând o axiomă la suplimentară cele trei axiome ale grupurilor:

A_4: $\forall x \forall y\, (x \circ y = y \circ x)$.

Orice triplet care respectă aceste axiome posedă o structură de grup. De pildă, structura Z = <$\mathbb{Z}$, +, 0> este un grup, unde '$\mathbb{Z}$' este mulţimea numerelor întregi, '+' este operaţia de adunare iar '0' este numărul 0; de asemenea, este un grup, structura T = ($\mathbb{Z}_3, \oplus$, [0]) cu semnificaţiilor lor obişnuite din aritmetica modulo 3, în care tabla operaţiei aditive $\oplus$ este definită astfel:

$\oplus$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

După cum se poate observa, cele două modele nu sunt izomorfe; cardinalitatea domeniului $\mathbb{Z}$ este $\aleph_0$ pe când cardinalitatea domeniului $\mathbb{Z}_3$, este 3. Dacă, însă, adăugăm axioma:

G_3: $\exists x \exists y \exists z\, (((x \neq y) \wedge ((x \neq z) \wedge (z \neq y)) \wedge \forall t((t = x) \vee ((t = x) \vee (t = z))))$

la grupul celor patru axiome care definesc structura de grup abelian, atunci nu este greu de demonstrat că orice două modele ale teoriei $T_{G3} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, G_3\}$ sunt izomorfe, cu alte cuvinte că T_{G3} este o teorie categorică.

Fie *M'* = <*D*, $\star$, *a*> o structură a teoriei T_{G3} cu domeniul $D = \{a, b, c\}$, operaţia $\star$ şi elementul neutru *a*. În acest caz, conform cu A_2 şi A_4 trebuie să avem:

(1) $a \star a = a$

(2) $b \star a = a \star b = b$

(3) $c \star a = a \star c = c$

Corespunzător, tabla operaţiei $\star$ trebuie să conţină:

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b		
c	c		

Să stabilim rezultatul operaţiei $\star$ pentru $b \star b$, $b \star c$, $c \star c$ ($c \star b$ a fost omis pentru că $b \star c = c \star b$ – în virtutea comutativităţii operaţiei $\star$)

Să presupunem că

(4) $b \star b = b$.

În acest caz,

(5) $b \star c = a$ (conform cu A_3, b trebuie să aibă un invers iar a *şi* b evident nu pot fi)

În acest caz însă, A_1 nu mai este respectată:

$b \star (b \star c) = b \star a$ [din (5)]

$= b$ [din (2)]

$(b \star b) \star c = b \star c$ [din (4)]

$= a$ [din (5)]

Prin urmare $b \star b \neq b$

Să presupunem că

(6) $b \star b = a$.

În acest caz, dacă:

(7) $c \star b = b \star c = a$

vom avea:

$c = c \star a$ [din (3)]

$= c \star (b \star b)$ [din (6)]

$= (c \star b) \star b$ [din (A_1)]

$= a \star b$ [din (7)]

$= b$ [din (2)]

adică $c = b$, ceea ce reprezintă evident o contradicţie cu asumpţia G_3 conform căreia $c \neq b$, prin urmare: $c \star b = b \star c \neq a$.

Aşadar, dacă $b \star b = a$, atunci $c \star b \neq a$. Prin urmare, dacă $b \star b = a$, atunci $c \star b = b \star c = b$ sau $c \star b = b \star c = c$. Să analizăm cele două cazuri

Dacă:

(8) $c \star b = b \star c = b$, atunci

$c = c \star a$ [din (3)]

$= c \star (b \star b)$ [din (6)]

$= (c \star b) \star b$ [din (A_3)]

$= b \star c$ [din (8)]

$= b$ [din (8)],

ceea ce, evident intră în contradicţie cu cu asumpţia G_3 conform căreia $c \neq b$.

Aşadar, ne mai rămâne de analizat o singură situaţie, cea în care $b \star b = a$ şi $c \star b = b \star c = c$. Ca în celalte cazuri de mai sus, să presupunem că

(9) $c \star b = b \star c = c$.

În aceste condiţii,

(10) $c \star c = a$ [pentru că respectarea axiomei A_3 impune existenţa unui simetric pentru elementul c, iar a şi b nu se califică pentru acest rol (a este elementul neutru, iar $c \star b = b \star c = c$ conform cu (9)].

Dar atunci:

$b = b \star a$ [din (3)]

$= b \star (c \star c)$ [din (10)]

$= (c \star b) \star b$ [din (A_3)]

$= c \star b$ [din (9)]

$= c$ [din (9)],

ceea ce, evident intră în contradicţie cu cu asumpţia G_3 conform căreia $c \neq b$.

Concluzia raţionamentului de până acum este că dacă $b \star b = b$ sau $b \star b = a$, atunci nu putem completa într-un mod consistent cu axiomele teoriei grupurilor abeliene de cardinalitate 3 celelalte căsuţe din tabla Caley a operaţiei $\star$. Aşadar, singura opţiune rămasă este să considerăm că $b \star b = c$

Concluzia raţionamentului de mai sus ne determină să completăm tabla Caley a operaţiei $\star$ cu $b \star b = c$. În acest fel, obţinem:

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	
c	c		

Din această tablă parţială a operaţiei $\star$ se observă că singurul rezultat al operaţiei $b \star c$ şi, evident, $c \star b$ trebuie să fie a pentru că A_3 impune existenţa unui simetric al elementului b, aşadar:

(11) $b \star c = c \star b = a$.

În aceste condiţii, $c \star c = b$, propoziţie a cărei demonstraţie calchiază demonstraţiile oferite mai sus şi o lăsăm în seama lectorului.

După cum se poate observa, tabla Caley a operaţiei $\star$ corespunde tablei Caley a operaţiei $\oplus$ ceea ce ne indică izomorfismul celor două modele:

$i: D \rightarrow Z_3$, $i = \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}$.

Aşadar, T_{G3} este o teorie categorică.

Definiţie 4.7: (*substructură*): fie σ o signatură şi $M_1 = (D_1, i_1)$ şi $M_2 = (D_2, i_2)$ două modele sau structuri ale acestei signaturi. Spunem că M_1 este o substructură al lui M_2, $M_1 \subseteq M_2$, dacă

i) $D_1 \subseteq D_2$

ii) pentru orice simbol c de constantă din signatura σ, $c^{M_1} = c^{M_2}$

iii) pentru orice simbol predicaţional P de aritate n ($n \geq 0$) din signatura σ, P^{M_1} este retracta relaţiei P^{M_2} la D_1^n, $P^{M_1} = P^{M_2} \restriction D_1^n$

iv) pentru orice simbol funcţional f de aritate n ($n \geq 0$) din signatura σ, f^{M_1} este retracta funcţiei f^{M_2} la D_1^n, $f^{M_1} = f^{M_2} \restriction D_1^n$.

De asemenea, spunem că M_1 este o *substructură proprie* al lui M_2 dacă $D_1 \subseteq D_2$ şi $D_1 \neq D_2$.

Se poate demonstra că această definiţie este echivalentă cu condiţia ca aplicaţia identică i: $D_1 \rightarrow D_2$ (de fapt, funcţia de de incluziune) să respecte clauze (ii), (iii), (iv) din definiţia izomorfismului a două structuri sau modele.

Fie signatura σ = {0, <} şi următoarea σ-structură $M_1 = \langle N, 0, < \rangle$ unde '0' şi '<' au interpretările lor obişnuite. Din moment ce signatura nu conţine nici un simbol funcţional, orice submulţime a lui N care îl include pe 0 poate constitui o substructură a lui M_1**.** Fie, de pildă, $M_2 = \langle \{0,1\}, 0, < \rangle$. După cum se poate observa din confruntarea cu definiţia substructurii, M_2 reprezintă o substructură a lui M_1. Evident, cu cât signatura limbajului este mai bogată în simboluri funcţionale, cu atât este mai diminuat numărul substructurilor care se pot forma cu structura respectivă. De pildă o signatură σ = {0, S, +, ×, <} şi o σ-structură M_3 = $\langle N, 0, S, +, \times, < \rangle$, în care simbolurile au semnificaţia lor obişnuită, iar S este funcţia succesor, nu are nici o substructură proprie. De ce? Să încercăm să construim o substructură M_4 a lui M_3. Conform definiţiei substructurii, clauza (ii), domeniul D_4 al lui M_4 trebuie să conţină elementul denotat de '0'. Conform clauzei (iv), domeniul D_4 al structurii M_4 este închis sub funcţia succesor S. În aceste condiţii, orice număr natural trebuie să se afle în domeniul D_4, aşadar, M_3 nu are substructuri proprii.

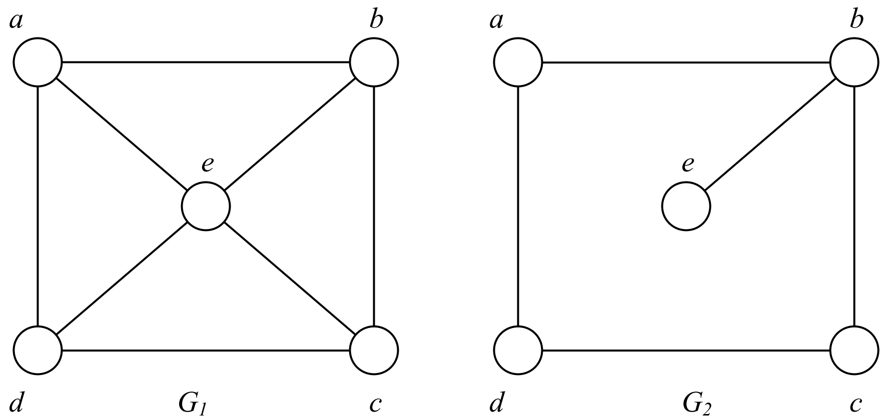
Un moment de reflecţie ne arată că mulţimea propoziţiilor adevărate într-o structură nu coincide cu cea a mulţimii propoziţiilor adevărate într-o substructură a structurii în cauză. Mai precis, fie $Th(M_1)$ – teoria lui M_1 – mulţimea propoziţiilor adevărate în structura M_1 şi M_2 o substructură proprie a lui M_1, simbolic $M_2 \subset M_1$. Atunci:

$$M_1 \models Th(M_1) \text{ dar } M_2 \not\models Th(M_1).$$

De pildă, în cazul exemplului nostru de mai sus cu structurile M_3 şi M_4, formula $\forall x \exists y(x < y)$ este adevărată în M_1 şi falsă în M_2.

Un alt exemplu care ne va ajuta să subliniem o distincţie conceptuală relevantă puţin mai departe provine din teoria grafurilor. Fie următoarele grafuri G_1 şi G_2, unde signatura σ este formată din patru constante individuale şi un singur simbol relaţional, R căruia îi corespunde în grafuri muchia ce uneşte două puncte oarecare:

figura 4



După cum se poate observa, domeniile celor două grafuri sunt identice iar G_2 se obţine din G_1 prin anularea relaţiilor dintre anumite elemente. Cu toate acestea, G_2 nu este o substructură a lui G_1, pentru că nu este respectată clauza (iii) din definiţia substructurii.

În $G_1 = \left\langle D^{G_1}, R^{G_1} \right\rangle$, printr-un abuz de limbaj spunem că

$D^{G_1} = \{a, b, c, d, e\}$ şi

$R^{G_1} = \{ \langle a,d \rangle; \langle a,e \rangle; \langle a,b \rangle; \langle b,e \rangle; \langle b,c \rangle; \langle c,e \rangle; \langle c,d \rangle; \langle d,e \rangle \}$

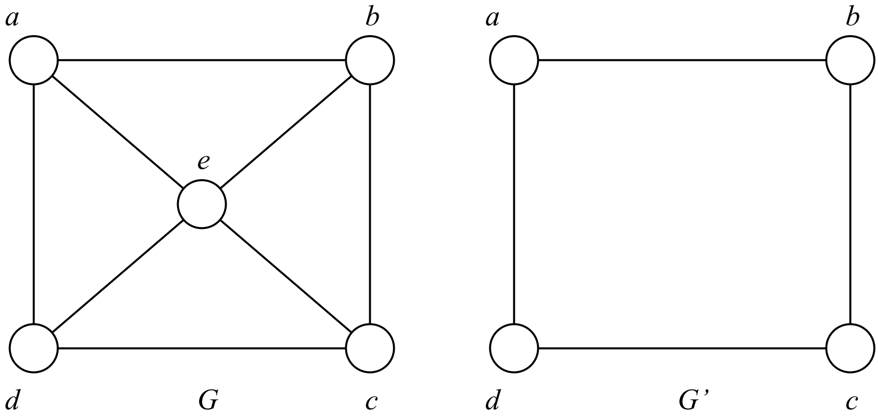
iar în $G_2 = \left\langle D^{G_2}, R^{G_2} \right\rangle$, avem acelaşi domeniu, $D^{G_1} = D^{G_2}$, dar

$R^{G_2} = \{ \langle a,d \rangle; \langle a,b \rangle; \langle b,e \rangle; \langle b,c \rangle; \langle c,d \rangle \}$.

În acest caz, $\langle a,e \rangle \in R^{G_1} \upharpoonright D^{G_2}$ dar $\langle a,e \rangle \notin R^{G_2}$, aşadar $R^{G_2} \neq R^{G_1} \upharpoonright D^{G_2}$.

În figura următoare, în schimb,

figura 5



se poate vedea că G' este o substructură a grafului G. În, $G = \langle D^G, R^G \rangle$, avem

$D^G = \{a, b, c, d, e\}$ şi relaţia

$R^G = \{\langle a, d\rangle; \langle a, e\rangle; \langle a, b\rangle; \langle b, e\rangle; \langle b, c\rangle; \langle c, e\rangle; \langle c, d\rangle; \langle d, e\rangle\}$

iar în $G' = \langle D^{G'}, R^{G'} \rangle$, avem domeniul,

$D^{G'} = \{a, b, c, d\}$ iar relaţia

$R^{G'} = \{\langle a, d\rangle; \langle a, b\rangle; \langle b, c\rangle; \langle c, d\rangle\}$,

aşadar $R^{G'} = R^G \upharpoonright D^{G'}$.

În *figura 4*, G_2 este un *subgraf*[4] al lui G_1, pe când în *figura 5*, G' este *graf indus* al lui G. În concluzie, ceea ce este o substructură în semantica model teoretică reprezintă, în teoria grafurilor, un graf indus. Cu aceste precizări să facem un pas mai departe şi să introducem definiţia *substructurilor echivalente*.

Definiţie 4.8: Fie M_1 şi M_2 două structuri astfel încât $M_1 \subseteq M_2$. Spunem că M_1 este o *substructură elementară* a lui M_2, în simboluri $M_1 \preccurlyeq M_2$ ddacă:

$$(M_1, s) \models \varphi \text{ ddacă } (M_2, s) \models \varphi$$

pentru orice funcţie de asignare s.

[4] Pentru definiţia noţiunilor de *graf* şi *graf indus* a se vedea – Reinhard Diestel [2005], *Graph Theory*, Heildelberg, New York: Springer, pp. 4-5.

Acum, cititorul atent a putut să observe distincţia dintre substructura unei structuri oarecare şi substructura elementară a respectivei structuri.
Să ilustrăm această distincţie cu ajutorul primului exemplu:
Am văzut că în signatura σ = {0, <} cu σ-structura $M_1 = \langle N, 0, < \rangle$, unde '0' şi '<' au interpretările lor obişnuite, există numeroase substructuri ale lui M_1, cum este, de pildă, M_2 = $\langle \{0,1\}, 0, < \rangle$, dar nici una dintre aceste substructuri nu este elementar echivalentă cu M_1. Dacă ar fi elementar echivalentă, atunci formula:

$$\varphi = \exists x(0 < x \wedge \forall y(0 < y) \rightarrow (x \leq y))$$

ar trebui să fie adevărată în oricare din aceste substructuri, pentru că $M_1 \models \varphi$. Să presupunem că M_i este o substructură elementară a lui M_1, adică $M_i \preccurlyeq M_1$. Atunci,

$$M_i \models \varphi,$$

ceea ce înseamnă, conform *definiţiei satisfiabilităţii*, că există un $d_1 \in D^{M}i$ astfel încât:

$$(1)\ (M_i, s[x = d_1]) \models (0 < x \wedge \forall y(0 < y) \rightarrow (x \leq y))$$

Dar

$$(2)\ M_i \preccurlyeq M_1:$$

Din (1) şi (2) rezultă că:

$$(M_1, s[x = d_1]) \models (0 < x \wedge \forall y(0 < y) \rightarrow (x \leq y)).$$

În M_1 există un unic element care satisface această formulă, respectiv *1*. Prin urmare, $d_1 \in D^{M}i$ trebuie să joace rolul elementului *1*. Similar, se poate arăta că există formule care pun în corespondenţă elementele *2, 3, 4*, ... din N cu elemente d_2, d_3, d_4... din $D^{M}i$, aşadar că $N \subseteq D^{M}i$ ceea ce contrazice ipoteza că $M_i \preccurlyeq M_1$.

Ceea ce exemplul de mai sus ne arată este că în construcţia unei susbstructuri elementare M_2 a unei structuri M_1 trebuie să includem in domeniul D^{M_2} toţi martorii formulelor existenţiale din M_1, adică toate elementele din D^{M_1} care fac adevărate formulele existenţiale ce descriu structura M_1. Iar această idee este nucleul demonstraţiei teoremei descendente *Löwenheim-Skolem*.

Teorema 4.4: *Teorema descendentă Löwenheim-Skolem*: Să presupunem că σ este o signatură care conţine o mulţime cel mult numărabilă de simboluri şi *M* este o σ-structură. Atunci *M* are o substructură elementară numărabilă.

Demonstraţia nu este foarte complicată dar este laborioasă şi presupune în esenţă să considerăm o submulţime cel mult numărabilă a domeniului structurii *M* pe care să o închidem sub formulele cuantificate existenţial (şi, evident, sub funcţii în măsura în care avem simboluri funcţionale în σ). Această închidere se realizează progresiv, construind domenii din ce în ce mai mari, pentru ca în final să obţinem o substructură elementară numărabilă a structurii *M*.

Teorema 4.5: *Teorema ascendentă Löwenheim-Skolem*: Dacă σ este o signatură care conţine o mulţime cel mult numărabilă de simboluri, *M* este o σ-structură şi *k* un cardinal, atunci *M* are o extensie elementară *M'* astfel încât $\overline{M'} \geq k$.

Vom încheia această secţiune prin a reaminti un rezultat de caracterizare model-teoretică a logicii de ordinul I obţinut în 1969 de către Per Lindström. Rezultatul este încapsulat în *teorema lui Lindström* care afirmă, într-un limbaj mai puţin riguros, că logica de ordinul I este singura logică maximală care satisface proprietatea descendentă *Löwenheim-Skolem* şi proprietatea de compactitate. Drept consecinţă, putem spune, cu acelaşi amendament asupra limbajului folosit, că orice extensie a logicii de ordinul I trebuie să distingă între diferite cardinalităţi infinite ale modelelor acestor logici în sensul în care anumite formule sunt satisfăcute în modele de o anumită cardinalitate dar nu în modele de orice cardinalitate.

5 Bibliografie

Aristotel. *Despre interpretare*, Bucureşti: Humanitas, 1998.

Barwise, Jon şi John Etchemendy. *Language, Proof and Logic*, New York; Londra: Seven Bridges Press, 1999.

Breaz, Simion şi Rodica Covaci. *Elemente de logică, teoria mulţimilor şi aritmetică*, Cluj Napoca: EFES, 2006.

Cameron, Peter J. *Introduction to Algebra*, ediţia a II-a, New York: Oxford University Press, 2007.

Carnap, Rudolf. *Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic*, Chicago: University of Chicago Press, 1947.

Carney, James D. şi Richard Scheer. *Fundamentals of Logic*, New York: The Macmillan Company; London: Collier Macmillan, 1964.

Chiswell, Ian şi Wilfrid Hodges. *Mathematical Logic*, Oxford: Oxford University Press, 2007.

Church, Alonzo. *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1956.

Copi, Irving. *Introduction to Logic*, New York: The Macmillan Company, 1967.

Cori, René şi Daniel Lascar. *Mathematical logic. A course with exercises*, New York: Oxford Univesity Press, 2000.

Creangă, Ion, Corina Reischer, Dan Simovici. *Introducere algebrică în informatică*, vol. II, 'Limbaje formale,' Iaşi: Junimea, 1974.

Dalen, Dirk van. *Logic and Structure* (ediţia a 4-a extinsă şi corectată), Berlin: Springer Verlag, 2004.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter Jörg Flum şi Wolfgang Thomas. *Mathematical Logic*, New York: Springer Verlag, 1984.

Frege, Gottlob. *Scrieri logico-filosofice*, Sorin Vieru (traducător), vol I, Bucureşti: Ed. Politică, 1977.

Gamuth, L.T.F. *Logic, language and meaning*, vol II 'Intensional logic and logical grammar', Chicago, Londra: The Univesity of Chicago Press, 1991.

Gamuth, L.T.F. *Logic, language and meaning*, vol. I: 'Introduction to logic,' Chicago; Londra: The University of Chicago Press, 1991.

Goldrei, Derek. *Propositional and predicate calculus:* a *model* of *argument*, London: Springer-Verlag, 2005.

Hacking, Jan. *A Concise Introduction to Logic*, New York: Random House, 1972.

Henkin, Leon. 'Fragments of the propositional calculus,' în *Journal of Symbolic Logic*, 14, 1949b.

Henkin, Leon. 'The completeness of the first-order functional calculus,' în *The Journal of Symbolic Logic*, 14, 1949a.

Hilbert, David şi Wilhelm Ackermann. *Principles of Mathematical Logic*, Providence, RI: American Mathematical Society, 1999.

Hintikka, Jaakko. 'Form and content in quantification theory,' în *Acta Philosophica Fennica*, 8, 1955.

Kahane, Howard. *Logic and Philosophy. A Modern Introduction*, Belmont: Wadsworth Publishing Company, 1978.

Kalmár, Laszlo. 'Über die Axiornatisierbarkeit des Aussagenkalküls,' *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 7, 1935.

LePore, Ernest. *Meaning and Argument*, Oxford: Blackwell, Malden, MA, 2000.

Löwenheim, Leopold. "Über Möglichkeiten im Relativkalkül," în *Mathematische Annalen*, 76, 1915.

McGee, Vann. *Logic I*, acessat la http://ocw.mit.edu/courses/linguistics-and-philosophy/24-241-logic-i-fall-2005/readings/chp15.pdf [19 iulie 2011].

Năstăsescu, Constantin, Ion D. Ion şi Constantin Niţă. *Complemente de algebră*, Bucureşti: Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1984.

Nolt, John, Achille Varzi şi Dennis Rohatyn. *Schaum's Outline of Logic*, New York: McGraw-Hill, 1998.

Platon. 'Sofistul,' în *Opere complete*, vol. 4, Bucureşti: Humanitas, 2004.

Popa, Cornel. *Logica predicatelor*, Bucureşti: Hyperion, 1992.

Russell, Bertrand şi Alfred Whitehead. *Principia Mathematica*, Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1910.

Smith, Peter. *An introduction to Gödel's theorems*, Cambridge, MA.: Cambridge University Press, 2013.